CC N° 4 Math. Sup. 2012-2013 2 h

I) Soit n un entier strictement positif. On considère l'équation différentielle :

$$(E_n) : \; xy' + ny = \frac{1}{1+x^2}.$$

1) Résoudre les équations (E_1), (E_2) et (E_3) sur $]0, +\infty[$.

2) Pour $x \in \,]0, +\infty[$, on pose : $\Phi_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt$.

Exprimer la solution générale de (E_n) sur $]0, +\infty[$ à l'aide de la fonction Φ_n.

3) En remarquant que $\forall t \in [0, x], \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$, donner un encadrement de $\Phi_n(x)$, puis de la limite de $\frac{\Phi_n(x)}{x^n}$ quand x tend vers 0.

4) En déduire que l'équation (E_n) admet sur $]0, +\infty[$ une solution unique f_n possédant une limite finie quand x tend vers 0_+. Préciser cette limite.

II) Soient G l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $E = \{ \varphi \in G \,/\, \forall x \in \mathbb{R}, \; \varphi''(x) = (1+x^2)\varphi(x) \}$.

1) Montrer que G est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de G.
3) Montrer que : $\forall (u, v) \in E^2$, $u'v - v'u$ est une fonction constante.
4) Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ est dans E.
5) Montrer que la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \int_0^x \frac{dt}{f^2(t)}$ est élément de E.
6) Soit $h \in E$. Montrer que h est combinaison linéaire de f et de g (on pourra utiliser la question 3).
7) Montrer que {f ; g} est une base de E.

III) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et $f : E \to E$ définie par :
$\forall P \in E$, $f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1) Montrer que f est linéaire.
2) Calculer $f(X^0)$, $f(X)$, puis $f(X^{2p})$ et $f(X^{2p+1})$ pour 2p et 2p+1 entre 2 et n.
3) Justifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{X^0 ; X; \ldots; X^{n-2}\}$.
4) Déterminer rg(f) et Ker(f).

Barème envisagé : I = 8 points , II = 7 points , III = 5 points.
