CC N° 4 Correction Math. Sup. 2012-2013 2 h

I)

1) (E_1) $S_1 = \left\{ y :]0;+\infty[\to \mathbb{R}; y(x) = \dfrac{C + \mathrm{Arc}\tan(x)}{x} / C \in \mathbb{R} \right\}$

(E_2) $S_2 = \left\{ y :]0;+\infty[\to \mathbb{R}; y(x) = \dfrac{C + \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{x^2} / C \in \mathbb{R} \right\}$

(E_3) $S_3 = \left\{ y :]0;+\infty[\to \mathbb{R}; y(x) = \dfrac{C + x - \mathrm{Arc}\tan(x)}{x^3} / C \in \mathbb{R} \right\}$

2) (E_n) $S_n = \left\{ y :]0;+\infty[\to \mathbb{R}; y(x) = \dfrac{C + \Phi_n(x)}{x^n} / C \in \mathbb{R} \right\}$

3) $\forall t \in [0, x], \dfrac{t^{n-1}}{1+x^2} \le \dfrac{t^{n-1}}{1+t^2} \le t^{n-1}$, donc en intégrant : $\dfrac{x^n}{\left(1+x^2\right)n} \le \Phi_n(x) \le \dfrac{x^n}{n}$

on a donc $\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)n} \le \dfrac{\Phi_n(x)}{x^n} \le \dfrac{1}{n}$ d'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Phi_n(x)}{x^n} = \dfrac{1}{n}$ (par le théorème des gendarmes).

4) On en déduit que l'équation (E_n) admet sur $]0,+\infty[$ une solution unique f_n possédant une limite finie quand x tend vers 0_+ : il faut $C = 0$. On a alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \dfrac{1}{n}$.

II) 1) et 2) évidents.

3) $\forall (u, v) \in E^2$, u et v sont deux fois dérivables et on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$(u'v - v'u)'(x) = u''(x)\, v(x) + u'(x)v'(x) - v''(x)u(x) - v'(x)u'(x)$
$= (1 + x^2)\, u(x)\, v(x) - (1 + x^2)\, v(x)\, u(x) = 0$
$(u'v - v'u)$ est donc une fonction constante.

4) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = (1 + x^2) f(x)$ donc f est dans E.

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{f^2(t)} + f(x) \frac{1}{f^2(x)} = f'(x) \int_0^x \frac{dt}{f^2(t)} + \frac{1}{f(x)}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = f''(x) \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{f^2(t)} + f'(x) \frac{1}{f^2(x)} - \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (1 + x^2) f(x) \int_0^x \frac{dt}{f^2(t)}$

6) Soit $h \in E$. D'après la question 3, la fonction $h'f - f'h$ est constante.

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $h'e^{\frac{x^2}{2}} - hxe^{\frac{x^2}{2}} = C$ donc $h' - hx = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.
La résolution de l'équation différentielle donne l'existence d'un réel λ tel que :

$$h(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + Ce^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \lambda f(x) + C\, f(x) \int_0^x \frac{dt}{f^2(t)} = \lambda f(x) + C\, g(x).$$

h est donc une combinaison linéaire de f et g.

7) D'après la question précédente, {f ; g} est une famille génératrice de E.
De plus, s'il existe des réels a et b tels que af + bg =0, alors en prenant x = 0, on a a = 0 et par suite b = 0. La famille {f ; g} est donc libre.

III) 1) $\forall (P;Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(P+\lambda Q) = f(P) + \lambda f(Q)$.

2) $f(X^0) = 0$; $f(X) = 0$.

$$f(X^{2p}) = \sum_{i=0}^{2p-1} \binom{2p}{i} \left(1+(-1)^{2p-i}\right) X^i = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{2p}{2j} 2X^{2j} \quad ;$$

$$f(X^{2p+1}) = \sum_{i=0}^{2p} \binom{2p+1}{i} \left(1+(-1)^{2p+1-i}\right) X^i = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{2p+1}{2j+1} 2X^{2j+1} .$$

3) $\forall k \in [\![2;n]\!]$, $f(X^k)$ est un polynôme de degré $k-2$.

La famille $\{f(X^2) ; f(X^3) ; \dots ; f(X^n)\}$ est une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts, allant de 0 à $n-2$. On a donc :
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{X^0 ; X; \dots; X^{n-2}\}$.

4) $\mathrm{rg}(f) = n-1$.
D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n+1-(n-1) = 2$.
X^0 et X sont linéairement indépendants et dans Ker(f), donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{X^0 ; X\}$.