CC N° 5 Math. Sup. 2012-2013 2 h

I) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x\,;y) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{y}{x} & \text{si } (x;y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } (x;y) \in \{0\} \times \mathbb{R} \end{cases}$

1) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que g admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
3) g est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
4) Déterminer, si elles existent, les dérivées partielles d'ordre 2 de g en (0 ; 0).

II) Soit la fonction *f* définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = x^4 + y^4 - 4xy\,.$$

1) Montrer que (0 ; 0) est un point critique de *f*.
2) *f* admet-elle un extremum en (0 ; 0) ?

III) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et B = $\{e_1\,; e_2\,; e_3\}$ une base de E.

On considère f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est : $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 3 \end{pmatrix}$

On note $f^2 = f \circ f$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda = \{x \in E,\ f(x) = \lambda x\}$.

1) Montrer que f est un automorphisme de E.
2) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ est un sous espace vectoriel de E.
3) Montrer que $E_\lambda \neq \{0\}$ si et seulement si $\det(f - \lambda.\mathrm{Id}_E) = 0$.
4) Déterminer une base B_1 de $E_3 = \ker(f - 3.Id_E)$.
5) Déterminer une base B_2 de $E_2 = \ker(f - 2.Id_E)$.
6) a) Ecrire la matrice de $(f - 2.Id_E)^2$ dans la base B.
   b) On note $C_2 = \ker((f - 2.Id_E)^2)$.
   Montrer que $E_2 \subset C_2$ et compléter la base B_2 pour obtenir une base B_3 de C_2.
7) Démontrer que E = $E_3 \oplus C_2$
8) Exprimer la matrice de *f* dans la base B' composée des vecteurs de B_1 et B_3.

Barème envisagé : I = 7 points , II = 3 points , III = 12 points.
