CC N° 5	Math. Sup. 2012-2013	2 h

I) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x\,;y) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{y}{x} \text{ si } (x;y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ 0 \text{ si } (x;y) \in \{0\} \times \mathbb{R} \end{cases}$

1) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

D'après les théorèmes généraux, g est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

Pour tout réel b :

$\forall (0;y) \in \{0\} \times \mathbb{R} : \ |g(0;y) - g(0;b)| = 0,$

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : \ |g(x;y) - g(0;b)| = \left|x^2 \sin\dfrac{y}{x}\right| \leq x^2 \leq \|(x;y) - (0;b)\|_2^2$

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \left(\|(x;y) - (0;b)\|_2 < \sqrt{\varepsilon}\right) \Rightarrow \left(|g(x;y) - g(0;b)| < \varepsilon\right)$. g est donc continue en (0 ; b).

On en déduit que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que g admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

D'après les théorèmes généraux, g admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et

pour tout (x ; y) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$: $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x;y) = 2x \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x;y) = x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$

Pour tout réel b : $\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h;b) - g(0;b)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h \sin\left(\dfrac{b}{h}\right) = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(0;b+h) - g(0;b)}{h} = 0 \end{cases}$ donc $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0;b) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(0;b) = 0.$

On en déduit que g admet des dérivées partielles (nulles) sur $\{0\} \times \mathbb{R}$.

3) g est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

D'après les théorèmes généraux, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $y \neq 0$, en posant $x = \dfrac{y}{2\pi n}$ $(\text{avec } n \in \mathbb{N}^*)$, on a : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x;y) = -y$ on en déduit que $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ n'est continue en aucun couple de $\{0\} \times \mathbb{R}^*$.

Pour tout réel b : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(0;b) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(0;0)\right| = 0$ et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}(0;b) - \dfrac{\partial g}{\partial y}(0;0)\right| = 0$

Pour tout (x ; y) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x;y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(0;0)\right| = \left|2x \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right| \leq 2|x| + |y| \leq 3\|(x;y)\|_2$$

$$\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}(x;y) - \dfrac{\partial g}{\partial y}(0;0)\right| = \left|x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right| \leq |x| \leq \|(x;y)\|_2$$

On en déduit que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cup (0;0)$.

4) Déterminer, si elles existent, les dérivées partielles d'ordre 2 de g en (0 ; 0).

On a : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial y}(0;h)-\dfrac{\partial g}{\partial y}(0;0)}{h}=0$ donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0;0)=0$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial y}(h;0)-\dfrac{\partial g}{\partial y}(0;0)}{h}=1$ donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0;0)=1$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(0;h)-\dfrac{\partial g}{\partial x}(0;0)}{h}=0$ donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0;0)=0$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(h;0)-\dfrac{\partial g}{\partial x}(0;0)}{h}=0$ donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0;0)=0$

II) Soit la fonction *f* définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y)=x^4+y^4-4xy.$$

1) Montrer que (0 ; 0) est un point critique de *f*.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)=4x^3-4y;\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)=4y^3-4x$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0;0)=0$ donc (0 ; 0) est un point critique de *f*.

2) *f* admet-elle un extremum en (0 ; 0) ?

$f(x;0)-f(0;0)=x^4\geq 0$; $f(x;x)-f(0;0)=2x^2(x^2-2)\leq 0$ dès que $|x|\leq\sqrt{2}$.

Il n'y a donc pas d'extremum en (0 ; 0) (point col).

III) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et B = {e_1 ; e_2 ; e_3 } une base de E.

On considère f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est : $A=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 3\end{pmatrix}$

On note $f^2=f\circ f$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on pose $E_\lambda=\{x\in E,\ f(x)=\lambda x\}$.

1) Montrer que f est un automorphisme de E.

$\det A = 12\neq 0$ donc f est un automorphisme de E

2) Montrer que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, E_λ est un sous espace vectoriel de E.

$\forall\lambda,\ 0\in E_\lambda$ et $\forall(u;v)\in(E_\lambda)^2, \alpha\in\mathbb{R}, f(u+\alpha v)=f(u)+\alpha f(v)=\lambda(u+\alpha v)$ donc $u+\alpha v\in E_\lambda$.

E_λ est donc un sev de E.

3) Montrer que $E_\lambda \neq \{0\}$ si et seulement si $\det(f - \lambda.Id_E) = 0$

$E_\lambda \neq \{0\}$ si et seulement si il existe $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$ ce qui équivaut à $Ker(f - \lambda.Id_E) \neq \{0\}$ ce qui équivaut à $\det(f - \lambda.Id_E) = 0$.

4) Déterminer une base B_1 de $E_3 = \ker(f - 3.Id_E)$.

$E_3 = Vect\{(1 ; -1 ; 2)\}$. On note $u_1 = (1 ; -1 ; 2)$.

5) Déterminer une base B_2 de $E_2 = \ker(f - 2.Id_E)$.

$E_2 = Vect\{(2 ; 1 ; 1)\}$. On note $u_2 = (2 ; 1 ; 1)$.

6) a) Ecrire la matrice de $(f - 2.Id_E)^2$ dans la base B.

$$mat_B\left((f - 2.Id_E)^2\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

7) b) On note $C_2 = \ker((f - 2.Id_E)^2)$.

Montrer que $E_2 \subset C_2$, et compléter la base B_2 pour obtenir une base B_3 de C_2.

Si $u \in E_2$, alors $(f - 2Id_E)(u) = 0$ donc $(f - 2Id_E)^2(u) = 0$, donc $u \in C_2$.

$E_3 = Vect\{(2 ; 1 ; 1) ; (1 ; 0 ; 0)\}$. On note $u_3 = (1 ; 0 ; 0)$.

8) Démontrer que $E = E_3 \oplus C_2$

Soit $u \in E_3 \cap C_2$, alors $f(u) = 3u$ et $(f - 2Id_E)^2(u) = 0$, donc $f(u) = 3u$ et $f^2(u) - 4f(u) + 4u = 0$ ce qui donne $u = 0$. Donc $E_3 \cap C_2 = \{0\}$.

Comme de plus $\dim(E_3) + \dim(C_2) = 3$, on a bien $E = E_3 \oplus C_2$

9) Exprimer la matrice de f dans la base B' composée des vecteurs de B_1 et B_3.

$$mat_{\{u_1;u_2;u_3\}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
