EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z \neq 1 \ \text{ et } \ \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0 \right)$$

2. Déterminer alors les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = 0$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n} \right) = 0$$

4. Factoriser $\omega^k - 1$ et déduire de la question précédente l'expression de la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \omega^k - 1 \right|^2$$

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul et a un réel de $\left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$. On souhaite résoudre l'équation

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^n = \frac{1 + i \tan a}{1 - i \tan a} \qquad (1)$$

1. Déterminer la forme exponentielle de

$$\frac{1 + i \tan a}{1 - i \tan a}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,

$$Z^n = \mathrm{e}^{2ia}$$

3. a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$|1 + iz| = |1 - iz| \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = z$$

b) Montrer que si z est solution de (1) alors

$$\left| \frac{1 + iz}{1 - iz} \right| = 1$$

c) En déduire, sans les calculer, que les solutions de (1) sont réelles.

4. Démontrer que

$$\forall \theta \in \left] -\pi ; \pi \right[, \qquad \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}{i\left(\mathrm{e}^{i\theta} + 1 \right)} = \tan \frac{\theta}{2}$$

5. Enfin, résoudre l'équation (1). On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tangente.

EXERCICE 3

1. On considère la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2(x-1)^2+2}}\right)$$

a) Donner le domaine de définition de la fonction *f*.

b) Calculer $f\left(1+\tan(\alpha)\right)$, pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire une expression simplifiée de *f*(x).

2. On considère la fonction *g* définie par :

$$g(x) = \mathrm{Arc}\tan(x-1)$$

a) Donner la dérivée de *g*.

b) Donner le domaine de dérivabilité de *f*, puis déterminer sa dérivée.

c) Retrouver le résultat de la question 1c)

3. Tracer la courbe de f dans un repère approprié.