Exercice 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. $1+z+z^2+...+z^{n-1}=0 \Leftrightarrow \left(z \neq 1 \text{ et } \dfrac{1-z^n}{1-z}=0 \right)$

(z = 1 n'est pas solution de $1+z+z^2+...+z^{n-1}=0$; la somme des termes d'une suite géométrique de raison z donne le résultat).

2. $1+z+z^2+...+z^{n-1}=0 \Leftrightarrow \left(z \neq 1 \text{ et } 1-z^n=0 \right)$. Les solutions de $1+z+z^2+...+z^{n-1}=0$ sont donc les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, hormis 1, soit : $\left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, n \in [\![1; n-1]\!] \right\} = \left\{ \omega; \omega^2; \omega^3; ...; \omega^{n-1} \right\}$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = 0$

puisque ω est solution de $1+z+z^2+...+z^{n-1}=0$.

4. $\omega^k - 1 = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}$.

Par suite, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right|^2 = 4\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ puisque $|i| = \left|\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right| = 1$.

Comme $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2 = 4\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2} = 2\sum_{k=0}^{n-1} 1 - 2\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 2n$$ (d'après la question **3**).

Exercice 2

1. Comme $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\dfrac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)} = \dfrac{1+i\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1-i\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \dfrac{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)} = \dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{\mathrm{e}^{-i\alpha}} = \mathrm{e}^{2i\alpha}$.

2. Les solutions de $Z^n = \mathrm{e}^{2i\alpha}$ sont : $\left\{ \mathrm{e}^{2i\frac{\alpha+k\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!] \right\}$ (question de cours…).

3. a) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$|1+iz| = |1-iz| \Leftrightarrow |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \Leftrightarrow (1+iz)\overline{(1+iz)} = (1-iz)\overline{(1-iz)}$

$\Leftrightarrow (1+iz)(1-i\overline{z}) = (1-iz)(1+i\overline{z}) \Leftrightarrow 1+z\overline{z}+i(z-\overline{z}) = 1+z\overline{z}+i(\overline{z}-z) \Leftrightarrow 2i(z-\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$

b) Si z est solution de (1) alors en passant au module dans (1), sachant que $\left|\frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}\right| = \left|e^{2i\alpha}\right| = 1$, on obtient : $\left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$.

c) D'après b), si z est solution de (1), alors $|1+iz| = |1-iz|$ ce qui, d'après a) équivaut à $z \in \mathbb{R}$.

4. $\forall \theta \in \left]-\pi;\pi\right[$, on a :

$$\mathrm{e}^{i\theta} - 1 = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{i\theta} + 1 = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$$

Ainsi, $\forall \theta \in \left]-\pi;\pi\right[, \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}{i\left(\mathrm{e}^{i\theta} + 1\right)} = \tan\frac{\theta}{2}$.

5. On remarque tout d'abord que z est solution de (1) si et seulement si $Z = \frac{1+iz}{1-iz}$ est défini et solution de $Z^n = \mathrm{e}^{2i\alpha}$, ce qui équivaut à $z \neq -i$ et $\frac{1+iz}{1-iz}$ est solution de $Z^n = \mathrm{e}^{2i\alpha}$.

D'après la question **3**, toute solution de $Z^n = \mathrm{e}^{2i\alpha}$ est réelle, donc $-i$ n'est pas solution de (1), et z est solution de (1) si et seulement si $\frac{1+iz}{1-iz}$ est solution de $Z^n = \mathrm{e}^{2i\alpha}$.

Ainsi z est solution de (1) si et seulement si :

$$\exists k \in [\![0;n-1]\!],\ \frac{1+iz}{1-iz} = \mathrm{e}^{2i\frac{\alpha+k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0;n-1]\!],\ zi\left(\mathrm{e}^{2i\frac{\alpha+k\pi}{n}} + 1\right) = \mathrm{e}^{2i\frac{\alpha+k\pi}{n}} - 1.$$

On a $\mathrm{e}^{2i\frac{\alpha+k\pi}{n}} \neq -1$ car $\mathrm{e}^{2i\frac{\alpha+k\pi}{n}} = -1 \Leftrightarrow 2\frac{\alpha+k\pi}{n} = \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow \alpha = n\frac{\pi}{2} - k\pi\ [n\pi]$ ce qui est impossible car $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi, z est solution de (1) si et seulement si : $\exists k \in [\![0;n-1]\!],\ z = \frac{\mathrm{e}^{2i\frac{\alpha+k\pi}{n}} - 1}{i\left(\mathrm{e}^{2i\frac{\alpha+k\pi}{n}} + 1\right)}$.

Enfin, comme $2\frac{\alpha+k\pi}{n} \neq \pi\ [2\pi]$, on peut appliquer le **4** pour conclure que :

z est solution de (1) si et seulement si $\exists k \in [\![0;n-1]\!], z = \tan\left(\frac{\alpha+k\pi}{n}\right)$

Exercice 3

1. a) $\forall x \in \mathbb{R},\ 2(x-1)^2+2>0.$

La fonction Arccos est définie sur [-1 ; 1], donc *f* est définie pour les réels x tels que :

$\left|\frac{x}{\sqrt{2(x-1)^2+2}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 2(x-1)^2+2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-2)^2$. *f* est donc définie sur $\mathbb{R}$.

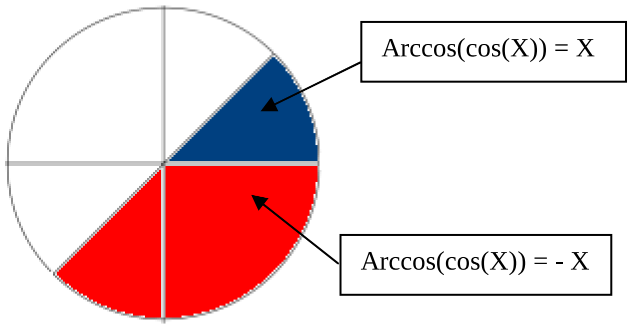
b) $f(1+\tan(\alpha)) = \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{1+\tan(\alpha)}{\sqrt{2(\tan(\alpha))^2+2}}\right) = \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{1+\tan(\alpha)}{\sqrt{2}}|\cos(\alpha)|\right)$

comme $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $|\cos(\alpha)| = \cos(\alpha)$ on a donc :

$f(1+\tan(\alpha)) = \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{Arc}\cos\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$, ainsi :

$f(1+\tan(\alpha)) = \begin{cases} -\alpha+\frac{\pi}{4} & \text{si } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right] \\ \alpha-\frac{\pi}{4} & \text{si } \alpha \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$.



c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \mathrm{Arctan}(x-1) & si\ x \in]-\infty;2] \\ \mathrm{Arctan}(x-1) - \frac{\pi}{4} & si\ x \in [2;+\infty[\end{cases}$

2. a) $g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2+1}$

b) La fonction Arccos est dérivable sur]-1 ; 1[. L'étude faite à la question 1a) montre que le domaine de dérivabilité de *f* est $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, et pour tout réel différent de 2 :

$f'(x) = \frac{x-2}{|x-2|\left((x-1)^2+1\right)} = \begin{cases} g'(x) & \text{si } x>2 \\ -g'(x) & \text{si } x<2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} g(x)+C_1 & \text{si } x>2 \\ -g(x)+C_2 & \text{si } x<2 \\ 0 & \text{si } x=2 \end{cases}$

f étant continue en 2, on a : Arctan(1) + C_1 = - Arctan(1) + C_2 = 0 donc $C_1 = \frac{-\pi}{4}$ et $C_2 = \frac{\pi}{4}$.

3.