EXERCICE 1

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

1. Donner l'image directe et l'image réciproque par f de [-1 ; 1].

2. a) Montrer que g définit une bijection de [-1 ; 1] sur un intervalle I à déterminer.
b) Expliciter l'application réciproque de g sur I.

3. On considère la fonction h : $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto \left(f(x); g(x) \right) \end{cases}$.

a) Montrer que h est injective.
b) h est-elle surjective ?

EXERCICE 2

Partie 1 – Somme des puissances *p*-ièmes des *n* premiers entiers

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et pour tout p de $\mathbb{N}$, on pose :

$$K(n;p) = \sum_{k=1}^{n} k^p .$$

1. Après avoir justifié que $K(n+1;p+1) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{p+1}$, montrer que :

$$K(n+1;p+1) = 1 + \sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} K(n;q).$$

2. En déduire que : $\sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} K(n;q) = (n+1)^{p+1} - 1$.

3. a) Déterminer $K(n;0)$.

b) En déduire les valeurs de $K(n;1), K(n;2),$ et $K(n;3)$.

Partie 2 – Somme des cubes des *n* premiers entiers

On considère une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$x_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ x_n > 0, \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} {x_k}^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right)^2 .$$

$\forall n \in \mathbb{N},$ on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$

1. Montrer que ${x_{n+1}}^3 = 2S_n x_{n+1} + {x_{n+1}}^2$

2. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = n$.

3. Retrouver $K(n;3)$.

T.S.V.P.

EXERCICE 3

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathrm{I} = \left]0;+\infty\right[$ et :

$$(E_n) : \quad xy' + ny = \frac{1}{1+x^2}.$$

Partie 1 – Résolution de (E_n)

On note (EH_n) l'équation homogène associée à (E_n).

1. Résoudre l'équation (EH_n) sur I.

2. *Résolution de (E_0) :*

a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{1+x^2}$$

b) En déduire les solutions de (E_0).

3. Résoudre (E_1).

4. *Résolution de (E_n)*

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note :

$$\forall x \geq 0, \qquad F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\,dt$$

Etablir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les solutions de (E_n) sur I sont les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto \frac{F_n(x)+C}{x^n}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Partie 2 – Forme explicite des solutions de (E_n)

L'objet de cette partie est le calcul explicite des solutions de (E_n) sur I, ce qui revient à chercher $F_n(x)$ pour tout $x > 0$.

1. Démontrer que pour $n \geq 1$ on a :

$$\forall x > 0, \qquad F_n(x) + F_{n+2}(x) = \frac{x^n}{n}$$

2. a) Calculer $F_1(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Calculer $F_2(x)$ pour tout $x > 0$.

3. *La formule trouvée en* **1.** *Incite à distinguer les cas n pair et n impair.*

a) Etablir que :

$$\forall n \geq 2, \quad \forall x > 0, \qquad F_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\,\frac{x^{2k}}{2k}$$

b) Etablir que :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x > 0, \qquad F_{2n+1}(x) = (-1)^n \operatorname{Arctan}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

4. Résoudre alors (E_3) et (E_4).

Barème envisagé : 5 points - 6 points - 9 points