EXERCICE 1

1. $f\left(\left[-1;1\right]\right)=\left[0;1\right]$; $\quad f^{-1}\left(\left[-1;1\right]\right)=\left[-1;1\right]$

2. a) g est dérivable sur [-1 ; 1] comme quotient de fonctions dérivables.

$\forall x\in\left[-1;1\right]\quad g'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

La dérivée de g étant strictement positive sur $\left]-1;1\right[$, la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle ; elle définit donc une bijection de [-1 ; 1] sur [g(-1) ; g(1)], à savoir $\left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

b) Soit y dans $\left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. On cherche l'antécédent de y par g, on cherche donc x tel que :

$$\left(g(x)=y\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{1+x^2}=y\right)\Leftrightarrow\left(x^2y-x+y=0\right).$$

Si y = 0, on trouve x = 0.

Sinon, il faut résoudre l'équation du second degré en x : $x^2y-x+y=0$.
On trouve $\Delta=1-4y^2$.
Si $y\in\left\{\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$, on a $\Delta=0$ et $x=\dfrac{1}{2y}$.
Si $y\in\left]\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$, on a $\Delta>0$, et $x=\dfrac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}$ ou $x=\dfrac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$.
Il faut $x\in\left]-1;1\right[$:

$$\left(\left|\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}\right|<1\right)\Leftrightarrow\left(\left(1+\sqrt{1-4y^2}\right)^2<4y^2\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{1-4y^2}<4y^2-1\right)$$

Comme $y\in\left]\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$, la dernière inégalité n'est jamais vérifiée (le membre de droite étant négatif), et il en est de même de la première.

<u>Remarque</u> : la fonction g étant bijective, il est inutile de vérifier que l'autre solution est dans l'intervalle $\left]-1;1\right[$.

Ainsi, on a : $f^{-1}\left(y\right)=\begin{cases}0 & \text{si } y=0\\ \dfrac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y} & \text{sinon}\end{cases}$

3. a) $\left(\left(f(x);g(x)\right)=\left(f(a);g(a)\right)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=a^2\\ \dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{a}{1+a^2}\end{cases}\Leftrightarrow\left(x=a\right)$.

La fonction h est donc injective.

b) (-1 ; 0) (par exemple) n'a pas d'antécédent par h. h n'est donc pas surjective.

EXERCICE 2

Partie 1

1. $K(n+1;p+1)=\sum_{k=1}^{n+1}k^{p+1}=\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{p+1}$, en effectuant dans la somme le changement $k=i+1$

On a donc :

$$K(n+1;p+1)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{p+1}=1+\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1}=1+\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}k^q$$
$$=1+\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}\sum_{k=1}^{n}k^q=1+\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}K(n;q).$$

2. On a : $K(n+1;p+1)=\sum_{k=1}^{n+1}k^{p+1}=\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}+(n+1)^{p+1}=K(n;p+1)+(n+1)^{p+1}$.

D'après ce qui précède, on a donc : $1+\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}K(n;q)=K(n;p+1)+(n+1)^{p+1}$ d'où :

$1+\sum_{q=0}^{p}\binom{p+1}{q}K(n;q)+K(n;p+1)=K(n;p+1)+(n+1)^{p+1}$, ce qui donne le résultat attendu.

3. a) $K(n;0)=\sum_{k=1}^{n}1=n$.

b) Le résultat de la question **2**) donne :

$\binom{2}{0}K(n;0)+\binom{2}{1}K(n;1)=(n+1)^2-1$, d'où l'on déduit : $K(n;1)=\dfrac{(n+1)^2-1-n}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\binom{3}{0}K(n;0)+\binom{3}{1}K(n;1)+\binom{3}{2}K(n;2)=(n+1)^3-1$, d'où l'on déduit :

$$K(n;2)=\frac{(n+1)^3-1-n-3\dfrac{n(n+1)}{2}}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\binom{4}{0}K(n;0)+\binom{4}{1}K(n;1)+\binom{4}{2}K(n;2)+\binom{4}{3}K(n;3)=(n+1)^4-1$, d'où l'on déduit :

$$K(n;3)=\frac{(n+1)^4-1-n-4\dfrac{n(n+1)}{2}-6\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Partie 2

1. Par hypothèse :

$$x_{n+1}{}^3=\left(\sum_{k=0}^{n+1}x_k\right)^2-\sum_{k=0}^{n}x_k{}^3=(S_n+x_{n+1})^2-S_n{}^2=S_n{}^2+2S_nx_{n+1}+x_{n+1}{}^2-S_n{}^2=2S_nx_{n+1}+x_{n+1}{}^2$$

2. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathrm{P_n}$: "$x_n=n$".

Montrons par récurrence que $\mathrm{P_n}$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$:
Initialisation : par hypothèse, $x_0=0$, donc $\mathrm{P_0}$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que pour tout $m \leq n$ P_m vraie.
D'après la question précédente, on a : $x_{n+1}{}^3 = 2S_n x_{n+1} + x_{n+1}{}^2$.

Par hypothèse de récurrence, on a : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on a donc :

$\left(x_{n+1}{}^3 - n(n+1)x_{n+1} - x_{n+1}{}^2 = 0\right) \Leftrightarrow \left(x_{n+1}\left(x_{n+1}{}^2 - x_{n+1} - n(n+1)\right) = 0\right)$

Par hypothèse $x_{n+1} \neq 0$ donc $x_{n+1}{}^2 - x_{n+1} - n(n+1) = 0$.

On trouve $\Delta = (2n+1)^2$, et $x_{n+1} = n+1$ ou $x_{n+1} = -n$ ce qui est exclu car $x_{n+1} > 0$.

P_{n+1} est donc vérifiée.
Par principe de récurrence P_n est vraie pour tout entier *n*.

3. $K(n;3) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = S_n{}^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

EXERCICE 3

Partie 1

1. (EH_n) : $xy' + ny = 0$.
Les solutions générales de $(EH)_n$ sont les fonctions y définies sur I par :
$y(x) = Ce^{-\int \frac{n}{x}dx} = Ce^{-n\ln(x)} = \dfrac{C}{x^n}$ où $C \in \mathbb{R}$

2. a) $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-x}{1+x^2}$

b) (E_0) : $xy' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

On a donc y solution de (E_0) sur I si et seulement si :

$y(x) = \int \dfrac{dx}{x(1+x^2)} = \int \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{-x}{1+x^2}\right)dx = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + K = \ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + K$, où $K \in \mathbb{R}$

3. On cherche une solution particulière de (E_1) de la forme $y_1(x) = F_1(x)h_1(x)$ avec
$h_1(x) = \dfrac{1}{x}$, solution de (EH_1).

y_1 étant solution de (E_1) on a : $\forall x \in$ I, $xF_1'(x)h_1(x) + xF_1(x)h_1'(x) + F_1(x)h_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

h étant solution de (EH_1), cela équivaut à : $\forall x \in$ I, $xF_1'(x)h_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

Ce qui équivaut à : $\forall x \in$ I, $F_1'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

On en déduit la solution particulière : y_1 telle que : $y_1(x) = \dfrac{\mathrm{Arc}\tan(x)}{x}$.

Ainsi les solutions de (E_1) sur I sont les fonctions y telles que :
$y(x) = \dfrac{C + \mathrm{Arc}\tan(x)}{x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

4. On cherche une solution particulière de (E_n) de la forme $y_n(x)=F_n(x)h_n(x)$ avec $h_n(x)=\dfrac{1}{x^n}$, solution de (EH_n).

y_n étant solution de (E_n) on a : $\forall x\in \mathrm{I},\quad xF_n'(x)h_n(x)+xF_n(x)h_n'(x)+nF_n(x)h_n(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

h_n étant solution de (EH_n), cela équivaut à : $\forall x\in \mathrm{I},\quad xF_n'(x)h_n(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,

Ce qui équivaut à : $\forall x\in \mathrm{I},\quad F_n'(x)=\dfrac{x^n}{x\left(1+x^2\right)}=\dfrac{x^{n-1}}{\left(1+x^2\right)}$.

En prenant $\forall x\geq 0,\ F_n(x)=\int_0^x \dfrac{t^{n-1}}{1+t^2}\,dt$, les solutions de ($E_n$) sur I sont les fonctions de la forme : $y: x\mapsto \dfrac{F_n(x)+C}{x^n}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

Partie 2

1. Pour $n\geq 1$ on a : $\forall x>0,\ F_n(x)+F_{n+2}(x)=\int_0^x \dfrac{t^{n-1}+t^{n+1}}{1+t^2}\,dt=\int_0^x \dfrac{t^{n-1}\left(1+t^2\right)}{1+t^2}\,dt=\int_0^x t^{n-1}dt=\dfrac{x^n}{n}$

2. a) Pour tout $x>0$, on a : $F_1(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\,dt=\mathrm{Arc}\tan(x)$

b) Pour tout $x>0$, on a : $F_2(x)=\int_0^x \dfrac{t}{1+t^2}\,dt=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

3. Pour $n\geq 2$, on note: $\mathrm{P}_n :"\forall x>0,\ F_{2n}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\dfrac{x^{2k}}{2k}"$

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n\geq 2$:

Initialisation : D'après le résultat établi à la question **1.**, on a :

$\forall x>0,\ F_2(x)+F_4(x)=\dfrac{x^2}{2}$, d'où l'on déduit :

$\forall x>0,\ F_4(x)=-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\dfrac{x^2}{2}$ ce qui donne P_2 vraie.

Hérédité : Soit $n\geq 2$, on suppose P_n vraie.
D'après le résultat établi à la question **1.**, on a :

$\forall x>0,\ F_{2n}(x)+F_{2n+2}(x)=\dfrac{x^{2n}}{2n}$, d'où l'on déduit avec l'hypothèse de récurrence : $\forall x>0$,

$$F_{2n+2}(x)=-\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\frac{x^{2k}}{2k}\right)+\frac{x^{2n}}{2n}=\frac{(-1)^{n+2}}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-1-k}\frac{x^{2k}}{2k}$$

P_{n+1} est donc vraie.

Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n\geq 2$.

b) Pour $n \geq 1$, on note: P_n : "$\forall x > 0, F_{2n+1}(x) = (-1)^n \operatorname{Arc}\tan(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$"

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$:

Initialisation : D'après le résultat établi à la question **1.**, on a :
$\forall x > 0,\ F_1(x) + F_3(x) = x$, d'où l'on déduit : $\forall x > 0,\ F_3(x) = -\operatorname{Arc}\tan(x) + x$,
ce qui donne P_1 vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, on suppose P_n vraie.
D'après le résultat établi à la question **1.**, on a :
$\forall x > 0,\ F_{2n+1}(x) + F_{2n+3}(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, d'où l'on déduit avec l'hypothèse de récurrence : $\forall x > 0$,

$$F_{2n+3}(x) = -\left((-1)^n \operatorname{Arc}\tan(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right) + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^{n+1} \operatorname{Arc}\tan(x) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-1-k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

P_{n+1} est donc vraie.

Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

4. En utilisant le résultat établi dans la **Partie 1** question **4.** et le résultat précédent, on obtient les solutions suivantes :

Pour (E_3) : $y : x \mapsto \dfrac{-\operatorname{Arc}\tan(x) + x + C}{x^3}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Pour (E_4) : $y : x \mapsto \dfrac{-\ln(1+x^2) + x^2 + C}{2x^4}$, avec $C \in \mathbb{R}$.