EXERCICE 1

Soient $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

L'objectif de l'exercice est de résoudre pour tout $n\in\mathbb{N}$: $A^nX = B$.

1. Résoudre le système: $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$ (qui correspond au cas $n = 1$).

2. a) Calculer P^{-1}.

b) Calculer la matrice $D = P^{-1} A P$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $A^n = P D^n P^{-1}$.

d) En déduire les solutions de l'équation matricielle : $A^nX = B$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

EXERCICE 2

Soient $ABCD$ un carré direct et G le milieu du segment $[A,D]$.

Soit $\mathcal{R}$ le repère orthonormé $(G;\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{GD}$.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est le cercle de diamètre $[A,D]$.

b) En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{E}$.

2. Déterminer une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ du cercle $\mathcal{G}$ circonscrit au triangle ABC.

3. Soient $\mathcal{C}(O, R)$ et $\mathcal{C}'(O', R')$ deux cercles du plan. On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont **orthogonaux** si et seulement si $OO'^2 = R^2 + R'^2$.

a) Montrer que deux cercles orthogonaux sont nécessairement sécants.

b) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles sécants en A, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les tangentes en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires.

c) Les cercles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ des questions **1.** et **2.** sont-ils orthogonaux ? Justifier la réponse.

d) Déterminer les cercles simultanément orthogonaux aux cercles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ des questions **1.** et **2.**

e) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ dans un repère orthonormé tels que :
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

i. A quelle condition portant sur a, b, c, $\mathcal{F}$ est-il un cercle ?
Cette condition étant remplie, préciser son centre et son rayon.

ii. On considère deux cercles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ d'équations respectives :
$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1 y + c_1 = 0$ et $x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + c_2 = 0$.
Démontrer que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $2(a_1a_2+b_1b_2)-(c_1+c_2)=0$

iii. Retrouver la réponse à la question **3.**c) à l'aide des équations des cercles.

T.S.V.P.

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. f est-elle deux fois dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4

Soit I un intervalle contenant 0, mais non réduit à $\{0\}$.
Soit f une fonction de classe C^1 sur I, et possédant une dérivée seconde en 0.
(**Attention :** on ne suppose pas que f est deux fois dérivable en dehors de 0).

On considère les fonctions g et h définies par : $\forall x \in I$ $\begin{cases} g(x) = f(x) - f(0) - xf'(0) \\ h(x) = g(x) - x^2 \dfrac{f''(0)}{2} \end{cases}$

1. a) Montrer que h est de classe C^1 sur I, et qu'elle possède en 0 une dérivée seconde que l'on déterminera.

b) Montrer l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 /\ \ \forall x \in I \quad \left(|x| \leq \alpha\right) \Rightarrow \left(|h'(x)| \leq \varepsilon |x|\right),$$

c) En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 /\ \ \forall x \in I \quad \left(|x| \leq \alpha\right) \Rightarrow \left(|h(x)| \leq \varepsilon x^2\right)$$

2. Montrer que $\dfrac{g(x)}{x^2}$ admet en 0 une limite, et la déterminer.

3. On considère la fonction T définie sur I par : $\begin{cases} T(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ T(0) = f'(0) \end{cases}$

a) Montrer que T est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de T en 0.

c) Montrer que pour tout $x \in I \setminus \{0\}$: $T'(x) = \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} - \dfrac{g(x)}{x^2}$

En déduire que T est de classe C^1 sur I.

Barème envisagé : 5 points - 7 points - 3 points - 5 points