EXERCICE 1

1. S = $\left\{\left(\frac{-11}{6};\frac{8}{3};\frac{-7}{6}\right)\right\}$

2. a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

b) $D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété : H_n : « $A^n = P D^n P^{-1}$»

On a : $PD^0P^{-1} = PI_3 P^{-1} = P P^{-1} = I_3 = A^0$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Soit n un entier. On suppose H_n vraie : $A^n = P D^n P^{-1}$.

Alors : $A^{n+1} = A A^n = A P D^n P^{-1} = (PP^{-1}) A P D^n P^{-1} = P (P^{-1} AP) D^n P^{-1} = PDD^n P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$.

H_{n+1} est donc vraie.

La propriété est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire pour tout entier naturel n, par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier n.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Un récurrence immédiate donne $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

C'est une matrice diagonale à éléments diagonaux non nuls, elle est donc inversible et

$$\left(D^n\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n X = B &\Leftrightarrow PD^nP^{-1}X = B \Leftrightarrow P^{-1}PD^nP^{-1}X = P^{-1}B \Leftrightarrow D^nP^{-1}X = P^{-1}B \\ &\Leftrightarrow \left(D^n\right)^{-1} D^nP^{-1}X = \left(D^n\right)^{-1} P^{-1}B \Leftrightarrow P^{-1}X = \left(D^n\right)^{-1} P^{-1}B \\ &\Leftrightarrow PP^{-1}X = P\left(D^n\right)^{-1} P^{-1}B \Leftrightarrow X = P\left(D^n\right)^{-1} P^{-1}B \end{aligned}.$$

La solution de l'équation $A^nX = B$ est : $\begin{pmatrix} -3+\frac{3}{2^n}-\frac{1}{3^n} \\ 3-\frac{1}{3^n} \\ -3+\frac{3}{2^n}+\frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

1. a) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \Leftrightarrow \left\|2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

$$\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

Or $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$.

Ainsi $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

$\mathscr{E}$ est le cercle centre G de rayon $\dfrac{AB}{2}$, c'est le cercle de diamètre [A,D].

b) Dans le repère $\left(G;\vec{i},\vec{j}\right)$, l'équation cartésienne de $\mathscr{E}$ est : $x^2+y^2=1$

2. ABCD étant un carré, le triangle ABC est rectangle isocèle en B.
On en déduit que le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle de diamètre [A, C].
Il a pour équation cartésienne : $(x-1)^2+y^2=2$

3. a) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' sont **orthogonaux** si et seulement si $OO'^2 = R^2 + R'^2$.
On a : $R^2+R'^2-2RR' \leq R^2+R'^2 \leq R^2+R'^2+2RR'$
D'où : $|R-R'| \leq OO' = \sqrt{R^2+R'^2} \leq R+R'$. Les deux cercles sont donc sécants.

b) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$'deux cercles sécants en A, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$' les tangentes en A à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' respectivement.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' sont orthogonaux si et seulement si $OO'^2 = OA^2 + O'A^2$.
Ce qui, d'après le théorème de Pythagore et sa réciproque équivaut au triangle $OO'A$ rectangle en A ce qui équivaut à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$'sont perpendiculaires (avec $\mathscr{D}$ = (AO') et $\mathscr{D}$' = (AO)).

a) Les cercles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$ des questions **1.** et **2.** ne sont pas orthogonaux car ils sont sécants en A où leurs tangentes ne sont pas perpendiculaires.

b) $\mathscr{C}(O\ ;R)$ est simultanément orthogonal aux cercles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} {x_O}^2+{y_O}^2=1+R^2 & L_1 \\ (x_O-1)^2+{y_O}^2=2+R^2 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_O}^2+{y_O}^2=1+R^2 & L_1 \\ x_O=0 & \leftarrow L_2-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {y_O}^2=1+R^2 \\ x_O=0 \end{cases}$$

Les cercles solutions sont les cercles de rayon R, de centre $O_1\left(0;\sqrt{1+R^2}\right)$ ou $O_2\left(0;-\sqrt{1+R^2}\right)$.

c) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c$

i. $\mathscr{F}$ est un cercle (non réduit à un point) si et seulement si $a^2 + b^2 > c$.
Le centre est alors le point de coordonnées (a ; b), son rayon $\sqrt{a^2+b^2-c}$.

ii. D'après la question précédente, $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont orthogonaux si et seulement si :
$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2={a_1}^2+{b_1}^2-c_1+{a_1}^2+{b_1}^2-c_1 \Leftrightarrow 2(a_1a_2+b_1b_2)-(c_1+c_2)=0$

iii. Pour les cercles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$ on a : $a_1 = b_1 = 0$, $c_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_2 = 0$ et $c_2 = -1$.
Ces valeurs ne vérifient pas l'égalité vue à la question précédente.

EXERCICE 3

Rappel : Soient g et h définies au voisinage de a ($a\in \overline{\mathbb{R}}$). Si $\lim\limits_{a} g = 0$ et h bornée au voisinage de a , alors $\lim\limits_{a} gh = 0$

1. Les théorèmes généraux donnent f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (elle y est même de classe C^∞).

Etude en 0 :

La fonction Arctan étant bornée, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

La fonction *f* est donc continue en 0.

Pour tout $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\,\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x^2}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = 2x\,\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x^2}{x^2+1}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\,\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x^2}{x^2+1}\right) = 0$

De plus, pour $x \neq 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\,\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 0$

On en déduit la fonction *f* est dérivable en 0, de dérivée *f* ’(0) =0, et que *f* ’ est continue en 0.

Finalement, *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x \neq 0$: $\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = 2\,\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x}{x^2+1}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que *f* ’ n’est pas dérivable en 0.

EXERCICE 4

1. a) *f* est de classe C^1 sur *I*, donc *g* et *h* également.

$\forall x \in I$: *h*’(x) = *f* ’(*x*) – *f* ’(0) – *x f* ’’(0). En particulier, *h*’(0) = 0.

$\forall x \in I\setminus\{0\}$: $\dfrac{h'(x)-h'(0)}{x} = \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} - f''(0)$

f étant deux fois dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = f''(0)$ on a donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h'(x)-h'(0)}{x} = 0$.

Ainsi, *h* est deux fois dérivable en 0, et *h*’’(0) = 0.

b) D’après ce qui précède, on a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h'(x)}{x} = 0$, ce qui s’écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 /\quad \forall x \in I \quad \left(|x| \leq \alpha\right) \Rightarrow \left(|h'(x)| \leq \varepsilon |x|\right)$$

c) La fonction *h* est continue et dérivable sur *I*.

Pour tout *x* de *I*, le théorème des accroissements finis appliqué sur l'intervalle [*x* ; 0] (si *x* < 0) ou [0 ; *x*] (si *x* > 0) donne : $\exists c \in \left]-|x|;|x|\right[\;/\; \left|h(x)-h(0)\right| = \left|h'(c)\right||x|$.

Avec la question précédente, on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \,/\ \ \forall x \in I,\ \exists c \in \left]-|x|;|x|\right[,\ \left(|x| \le \alpha\right) \Rightarrow \left(\left|h(x)\right| \le \left|h'(c)\right||x| \le \varepsilon |c||x| \le \varepsilon x^2\right)$$

Cela traduit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{x^2} = 0$

2. $\forall x \in I$: $\dfrac{g(x)}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2} + \dfrac{f''(0)}{2}$, donc d'après ce qui précède $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = \dfrac{f''(0)}{2}$

3. a) *f* étant dérivable en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0} T(x) = f'(0)$ = *T*(0).

On en déduit que *T* est continue en 0.

b) $\forall x \in I \setminus \{0\}$: $\dfrac{T(x)-T(0)}{x} = \dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

On déduit de la question **2.** que *T* est dérivable en 0, et *T* '(0) = $\dfrac{f''(0)}{2}$.

C) $\forall x \in I \setminus \{0\}$:

$$T'(x) = \frac{xf'(x) - \left(f(x) - f(0)\right)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{g(x) + xf'(0)}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} - \frac{g(x)}{x^2}$$

T est de classe C^1 sur *I*\{0}, car *f* l'est.

f étant deux fois dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = f''(0)$, et comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = \dfrac{f''(0)}{2}$,

on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} T'(x) = \dfrac{f''(0)}{2}$ = *T* ''(0). Ainsi, *T* ' est continue en 0.

On en déduit que *T* est de classe C^1 sur *I*.