EXERCICE 1

Soient $e_1 = (-1 ; 1 ; 1 ; 0)$; $e_2 = (2 ; -2 ; 0 ; 1)$; $e_3 = (-2 ; 4 ; 0 ; 1)$ et $e_4 = (3 ; -5 ; 1 ; 0)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Déterminer le rang de la famille $\{e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4\}$.

EXERCICE 2

Dans l'ensemble de l'exercice on note $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que la base canonique de E est $\{1 ; X ; X^2\}$.

Soient $P_1 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_2 = -X(X-2)$ et $P_3 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de E.

1. Montrer que $\{P_1; P_2; P_3\}$ est une base de E.

2. Soit $P = aP_1 + bP_2 + cP_3 \in E$. Exprimer P dans la base canonique de E.

3. Soit $Q = aX^2 + bX + c \in E$. Exprimer Q dans la base $\{P_1; P_2; P_3\}$.

4. Montrer que pour tous les réels a , b et c il existe un unique polynôme R de E tel que :
$R(0) = a$, $R(1) = b$ et $R(2) = c$.

5. Soit $F = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et en déterminer une base.

b) Donner un sous-espace vectoriel de E, supplémentaire de F.

6. Soit $G = \{P \in E, P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$

a) Montrer que G est un sous espace vectoriel de E et en déterminer une base.

b) Donner un sous-espace vectoriel de E, supplémentaire de G.

7. Soit $N = \{P \in E, P(0)P(1) = 0\}$

N est-il un sous espace vectoriel de E ?

EXERCICE 3

Questions préliminaires

1. Démontrer le résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Justifier que la fonction Arctan admet le développement limité en 0 suivant :

$$\mathrm{Arc}\tan(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

T.S.V.P.

Etude d'une fonction

On définit la fonction f sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

1. Variations de *f*

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}$.

b) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}$. On trouvera une expression sous la forme :

$f''(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(P(x))^2}$, où P est un polynôme du second degré, et α et β deux constantes réelles.

c) Calculer les limites de f' aux bornes de $\mathcal{D}$.

d) Donner un équivalent de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

e) Dresser le tableau de variations de f.

2. Etude autour de *x* = 1

a) Donner une expression de f sur $I_1 =]0\,;1[$ et sur $I_2 =]1;+\infty[$ à l'aide de la fonction g définie par $g(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

b) Calculer le développement limité de g au voisinage de 1 à l'ordre 3.

c) En déduire le développement limité de f au voisinage de 1 à l'ordre 3, lorsque $x \in I_1$, puis le développement limité de f au voisinage de 1 à l'ordre 3 lorsque $x \in I_2$.

d) Quelles informations ces développements limités fournissent-ils pour f ?

3. Représentation graphique

a) On admet que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

et $f(x) \underset{x\to-\infty}{=} \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Quelle interprétation graphique peut-on faire ?

b) Tracer l'allure générale de la courbe de f en exploitant les résultats trouvés.

Barème envisagé : 3 points – 7 points – 10 points