EXERCICE 1

$e_4 = e_1 + e_2 - e_3$, et la famille $\{e_1 ; e_2 ; e_3\}$ est libre. Ainsi, $rg\{e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4\} = 3$.

EXERCICE 2

1. $\forall\{\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\}\in\mathbb{R}^3,\ \lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3=\left(\frac{1}{2}\lambda_1-\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_3\right)X^2+\left(\frac{-3}{2}\lambda_1+2\lambda_2-\frac{1}{2}\lambda_3\right)X+\lambda_1$

$\{1 ; X ; X^2\}$ étant une base de E, on a :

$$\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3=0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda_1-\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_3=0\\ \frac{-3}{2}\lambda_1+2\lambda_2-\frac{1}{2}\lambda_3=0\\ \lambda_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3.$$

$\{P_1;P_2;P_3\}$ est donc une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 3: c'est une base.

2. Soit $P = aP_1 + bP_2 + cP_3 \in E$. $P=a+\left(\frac{-3}{2}a+2b-\frac{1}{2}c\right)X+\left(\frac{1}{2}a-b+\frac{1}{2}c\right)X^2$.

3. Soit $Q = aX^2 + bX + c \in E$. Notons $Q = \alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3$.
De $P_1(1) = P_1(2) = P_2(0) = P_2(2) = P_3(0) = P_3(1) = 0$ et $P_1(0) = P_2(1) = P_3(2) = 1$ on déduit :
$Q(0) = c = \alpha$; $Q(1) = a + b + c = \beta$; $Q(2) = 4a + 2b + c = \gamma$.

4. Soit $R=\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3\in E$. Comme vu dans la question précédente, on a :
$R(0) = \alpha$; $R(1) = \beta$ et $R(2) = \gamma$.
De l'unicité de l'écriture de R dans la base $\{P_1;P_2;P_3\}$, on déduit que :
$R\in E$ vérifie $R(0) = a$, $R(1) = b$ et $R(2) = c$ si et seulement si $R = aP_1+bP_2+cP_3$.

5. a) Le polynôme nul est clairement dans F.
$\forall(P;Q)\in F,\forall\lambda\in\mathbb{R}:\ (P+\lambda Q)(1)=P(1)+\lambda Q(1)=0$, donc $P+\lambda Q\in F$.
F est donc un sous-espace vectoriel de E.

P_1 et P_3 sont dans F. Ainsi, $\mathrm{Vect}\{P_1 ; P_3\} \subset F$. Les polynômes P_1 et P_3 n'étant clairement pas colinéaires, on en déduit que $\dim(F) \geq 2$. $P_2 \notin F$ donc $\dim(F) < 3$.
Ainsi $\{P_1 ; P_3\}$ est une base de F.

b) D'après ce qui précède, $\mathrm{Vect}\{P_2\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E.

6. a) Le polynôme nul est clairement dans G.
$\forall(P;Q)\in G,\forall\lambda\in\mathbb{R}:\ (P+\lambda Q)(1)=P(1)+\lambda Q(1)=0$, et $(P+\lambda Q)(0)=P(0)+\lambda Q(0)=0$ donc $P+\lambda Q\in G$. G est donc un sous-espace vectoriel de E.

$G \subset F$ donc $\dim(G) \leq 2$; $P_3 \in G$ et $P_1 \notin G$. On en déduit que $G = \mathrm{Vect}\{P_3\}$.

b) D'après ce qui précède, $\mathrm{Vect}\{P_1 ; P_2\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E.

7. $P_1 \in N$, $P_2 \in N$, et $P_1 + P_2 \notin N$ ($(P_1 + P_2)(0) = (P_1 + P_2)(1) = 1$)
N n'est donc pas un sous espace vectoriel de E .

EXERCICE 3

Questions préliminaires

1. Soit *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}$. *f* est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (composée et somme) et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 0$. On en déduit que *f* est constante sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 2\operatorname{Arctan}(-1) = \dfrac{-\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Arctan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc en tout réel un développement limité à tout ordre.
En particulier, Arctan admet un développement limité en 0 d'ordre 3, obtenu par primitivation du développement limité en 0 d'ordre 2 de sa dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o_0\left(x^2\right) \text{ donc : } \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + o_0\left(x^3\right)$$

Finalement $\operatorname{Arctan} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o_0\left(x^3\right)$.

Etude d'une fonction

1. Variations de *f*

a) $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$, et Arctan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $x \mapsto \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$. Par produit, *f* est donc est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.

De plus, $\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{2x^2 - 2x + 1}$

b) $\forall x \in \mathcal{D},\ f''(x) = \dfrac{2x-2}{\left(2x^2 - 2x + 1\right)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \dfrac{\pi}{4},\ \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \dfrac{\pi}{4}, \lim\limits_{x\to1^+} f'(x) = \dfrac{\pi}{2} - 1, \lim\limits_{x\to1^-} f'(x) = \dfrac{-\pi}{2} - 1.$

d) $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4}x$ et $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4}x$. D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

De plus: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \dfrac{-\pi}{2}$.

e) Le signe de $f''(x)$ sur $\mathcal{D}$ est celui de $x - 1$, et $f'(0) = 0$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$		$-$	$\|$	$+$	
f'	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}-1 \;\|\; \frac{\pi}{2}-1$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2} \;\|\; \frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

<u>2. Etude autour de $x = 1$</u>

a) $\forall x \in I_1$, $\dfrac{x}{x-1} < 0$, donc d'après la question préliminaire 1 :

$$\forall x \in I_1 : f(x) = x\left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\tan\frac{x-1}{x}\right)$$

$\forall x \in I_2$, $\dfrac{x}{x-1} > 0$, donc d'après la question préliminaire 1 :

$$\forall x \in I_2 : f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\tan\frac{x-1}{x}\right).$$

On peut donc en conclure que : $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}x - g(x) & \text{si } x \in I_1 \\ \dfrac{\pi}{2}x - g(x) & \text{si } x \in I_2 \end{cases}$

b) On pose : $u = x - 1$, puis $g(x) = g(1+u) = (1+u)\operatorname{Arc}\tan\dfrac{u}{1+u}$.

On a: $\dfrac{u}{1+u} = u\left(1 - u + u^2 + o_0\left(u^2\right)\right) = u - u^2 + u^3 + o_0\left(u^3\right)$.

Compte tenu de la question préliminaire 2, on obtient :

$$(1+u)\operatorname{Arc}\tan\frac{u}{1+u} = (1+u)\operatorname{Arc}\tan\left(u - u^2 + u^3 + o_0\left(u^3\right)\right) = (1+u)\left(u - u^2 + u^3 - \frac{1}{3}u^3 + o_0\left(u^3\right)\right)$$

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + o_0\left(u^3\right)$$

Finalement : $g(x) \underset{x\to 1}{=} (x-1) - \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + o_1\left((x-1)^3\right)$

c) $\forall x \in I_1$, $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}x - g(x) \underset{x\to 1^-}{=} -\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)(x-1) + \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + o_{1^-}\left((x-1)^3\right)$;

$\forall x \in I_2$: $f(x) = \dfrac{\pi}{2}x - g(x) \underset{x\to 1^+}{=} \dfrac{\pi}{2} + \left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)(x-1) + \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + o_{1^+}\left((x-1)^3\right)$

d) Soit h la restriction de f à $]-\infty; 1[$. h est prolongeable par continuité en 1 en posant $h(1) = -\dfrac{\pi}{2}$

Ainsi prolongée, h est dérivable en 1, et $h'(1) = -\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)$.

On peut conclure que le graphe de f admet une demi-tangente à gauche en 1, d'équation :
$y = -\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)(x-1)$.

De plus, $f(x) - \left(-\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)(x-1)\right) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{3}(x-1)^3$ qui est du signe négatif sur I_1, donc le graphe de f est localement en-dessous de sa demi-tangente.

De même :

Soit k la restriction de f à $]1;+\infty[$. k est prolongeable par continuité en 1 en posant $k(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi prolongée, k est dérivable en 1, et $k'(1)=\dfrac{\pi}{2}-1$.

On peut conclure que le graphe de f admet une demi-tangente à droite en 1, d'équation :
$y=\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)(x-1)$.

De plus, $f(x)-\left(\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)(x-1)\right)\underset{x\to 1^+}{\sim}\dfrac{1}{3}(x-1)^3$ qui est du signe positif sur I_2, donc le graphe de f est localement au dessus de sa demi-tangente.

3. Représentation graphique

a) On admet que : $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

et $f(x)\underset{x\to-\infty}{=}\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

La droite d'équation $y=\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{1}{2}$ est donc asymptote au graphe de f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

De plus, $f(x)-\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{1}{2}\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4x}$ qui est de signe positif sur $\mathbb{R}_+^*$, donc le graphe de f est localement au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

De même, $f(x)-\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{1}{2}\right)\underset{-\infty}{\sim}\dfrac{1}{4x}$ qui est de signe négatif sur $\mathbb{R}_-^*$, donc le graphe de f est localement en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

b)