EXERCICE 1

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

1. a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée.

b) En déduire le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{x}$

a) Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \operatorname{Arc}\tan x \ln x - \int_1^x \varphi(t)dt$.

c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.

On note encore F la fonction ainsi prolongée.

d) Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?

4. Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t\,dt$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0;1[, \left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x)$.

d) Montrer que $\left| F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$.

e) En déduire une valeur approchée au dixième de $F(0)$.

EXERCICE 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}$ et $f(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$

où $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

2. Déterminer une base de Im f, ainsi qu'une base de Ker f. Que peut-on en conclure ?

3. Im f et Ker f sont-ils supplémentaires ?

4. Montrer que $A^2 = -3I + J$ où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

T.S.V.P.

EXERCICE 3

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces *A* et *B*.
Elle est dans la pièce *A* à l'instant $t = 0$, et évolue ainsi :

- si elle est en *A* à l'instant $n \in \mathbb{N}$, elle reste en *A* avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en *B* avec la probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n + 1$;
- si elle est en *B* à l'instant $n \in \mathbb{N}$, elle reste en *B* avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ou passe en *A* avec la probabilité $\frac{1}{4}$, ou sort de l'appartement avec la probabilité $\frac{1}{4}$ à l'instant $n + 1$;
- si elle est dehors, elle y reste.

On note : A_n = « la guêpe est en *A* à l'instant *n* », B_n = « la guêpe est en *B* à l'instant *n* », et C_n = « la guêpe est dehors à l'instant *n* ».
Les probabilités respectives de ces événements sont notées a_n, b_n, et c_n.

1. Calculer $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$.

2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ est une suite constante.

4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$ est une suite géométrique.

5. En déduire a_n et b_n en fonction de *n*.

6. Que vaut c_n ? Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ et interpréter le résultat obtenu.

Barème envisagé : 10 points - 5 points - 5 points