**EXERCICE 1**

**1. a)** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*_+$, donc la fonction *F* est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, F'(x) = f(x)$.

**b)** Pour tout réel *x* de $\mathbb{R}^*_+$, $f(x)$ est du signe de ln *x*, on en déduit que la fonction *F* est décroissante sur ]0 ; 1], et croissante sur $[1;+\infty[$ ; elle admet donc un minimum en 1 qui vaut *F*(1) = 0. Ainsi, la fonction *F* est positive sur son domaine.

**2.** <u>Première méthode</u> :

En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale qui définit *F*, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \int_1^x \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_1^x \frac{\ln u}{u^2+1}\,du = F(x).$$

<u>Deuxième méthode :</u>

La fonction *F* étant dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ de dérivée *f*, la fonction $x \mapsto F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est également dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}F'\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Or, $\dfrac{-1}{x^2}F'\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}} = f(x)$

On en déduit qu'il existe un réel *C*, tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right) + C$.

En prenant *x* = 1, il vient *C* = 0, et $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

**3. a)** On a : $\operatorname{Arc}\tan x \underset{0}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 1$. La fonction $\varphi$ est donc prolongeable par continuité en 0.
On note $\tilde{\varphi}$ la fonction prolongée, continue sur $\mathbb{R}^+$.

**b)** Dans l'intégrale qui définit *F*, on effectue une intégration par parties avec :
$u(t) = \ln t,\ v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ ; on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ F(x) = \left[\operatorname{Arc}\tan t\ \ln t\right]_1^x - \int_1^x \varphi(t)\,dt = \operatorname{Arc}\tan x\ \ln x - \int_1^x \varphi(t)\,dt.$$

**c)** On a : $\operatorname{Arc}\tan x\,\ln x \underset{0}{\sim} x\ln x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{Arc}\tan x\,\ln x = 0$.

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \int_1^x \varphi(t)dt = \int_1^x \tilde{\varphi}(t)dt$ ; la fonction $\tilde{\varphi}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto \int_1^x \tilde{\varphi}(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{x\to 0}\int_1^x \varphi(t)dt = \int_1^0 \tilde{\varphi}(t)dt$.

Ainsi, la fonction $F$ est prolongeable par continuité en 0 avec $F(0) = \int_0^1 \tilde{\varphi}(t)dt$

**d)** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc, la fonction $F$ admettant une limite en 0, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{X\to 0^+} F\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to 0^+} F(X) = \int_0^1 \tilde{\varphi}(t)dt .$$

**4. a)** Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, à l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t\, dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^k}{k+1}dt = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}.$$

**b)** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k = \dfrac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1+x^2}$ (c'est la somme partielle d'une série géométrique), et par suite : $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

**c)** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]0;1\right[$, on a :

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| = \left|\int_1^x \ln t\left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right)dt\right| = \left|\int_1^x \ln t\left(\frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\right)dt\right|.$$

Or, $\forall t \in \left]0;1\right[ :\ 0 \le (-\ln t)\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \le (-\ln t)t^{2n+2}$, on en déduit que: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]0;1\right[$,

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| = \int_x^1 (-\ln t)\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \le \int_x^1 (-\ln t)t^{2n+2}dt = I_{2n+2}(x).$$

**d)** $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ I_k(x) = \dfrac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \dfrac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x\to 0} I_k(x) = \dfrac{1}{(k+1)^2}$

Par passage à la limite dans l'inégalité trouvée à la question précédente, on a :

$$\left|F(0) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right| \le \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

**e)** Pour $n$ = 1, $\dfrac{1}{(2n+3)^2} = \dfrac{1}{25} < 10^{-1}$, ainsi, une valeur approchée au dixième de $F(0)$ est donnée par : $\sum\limits_{k=0}^{1}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \dfrac{8}{9} \simeq 0,9$

**EXERCICE 2**

**1.** $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**2.** Im $f$ = Vect{(0 ; 1 ; -1) ; (-1 ; 0 ; 1) ; (1 ; -1 ; 0)}
Comme (1; -1; 0) = – (0; 1; -1) – (-1; 0; 1) et que (0; 1; -1) et (-1; 0; 1) ne sont pas colinéaires, on en déduit qu'une base de Im $f$ est {(0 ; 1 ; -1) ; (-1 ; 0 ; 1) }.

Ker($f$)= Vect{(1 ; 1 ; 1)}.

On peut déduire de ce qui précède que $f$ n'est ni injective, ni surjective.

**3.** On montre que la famille {(0 ; 1 ; -1) ; (-1 ; 0 ; 1) ; (1 ; 1 ; 1)} est une famille libre, de cardinal 3 ; c'est donc une base $\mathbb{R}^3$. On en déduit que Im $f \oplus$ Ker $f$ = $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que Im $f$ et Ker $f$ sont supplémentaires.

**4.** $A^2 = -3I + J$ se vérifie par un calcul simple.

**5.** On a : $A^0 = I_3$ ; $A^3 = -3A$.
A l'aide d'une récurrence on montre que : $\forall p \in \mathbb{N}$ : $A^{2p+1} = (-3)^p A$.
Par suite : $\forall p \in \mathbb{N}^* : A^{2p} = A^{2p-1+1} = (-3)^{p-1} A.A = (-3)^{p-1}\left(-3I + J\right)$.

**EXERCICE 3**

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$ {$A_n$ ; $B_n$ ; $C_n$ } forme un système complet d'événements.

**1.** $a_0 = 1;\ b_0 = 0;\ c_0 = 0;\ a_1 = \dfrac{1}{3};\ b_1 = \dfrac{2}{3};\ c_1 = 0.$

La formule des probabilités totales donne :

$$a_2 = \mathrm{P}_{A_1}(A_2)\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}_{B_1}(A_2)\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}_{C_1}(A_2)\mathrm{P}(C_1) = \frac{5}{18}$$

$$b_2 = \mathrm{P}_{A_1}(B_2)\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}_{B_1}(B_2)\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}_{C_1}(B_2)\mathrm{P}(C_1) = \frac{10}{18}$$

$$c_2 = 1 - a_2 - b_2 = \frac{3}{18}$$

**2.** La formule des probabilités totales donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_{n+1} = \mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathrm{P}(B_n) + \mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathrm{P}(C_n) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$$

$$b_{n+1} = \mathrm{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathrm{P}(B_n) + \mathrm{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathrm{P}(C_n) = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$$

**3.** $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{6}{10}a_{n+1} - \dfrac{3}{10}b_{n+1} = \dfrac{6}{10}\left(\dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n\right) - \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right) = 0.$

Ainsi, $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ est une suite constante (nulle).

**4.** $\forall n\in\mathbb{N}:\ v_{n+1}=\dfrac{4}{10}a_{n+1}+\dfrac{3}{10}b_{n+1}=\dfrac{4}{10}\left(\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{4}b_n\right)+\dfrac{3}{10}\left(\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{2}b_n\right)=\dfrac{5}{6}v_n$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$

**5.** Les résultat de la question **3** permet de dire que $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ b_n=2a_n$.

Le résultat de la question **4** donne : $\forall n\in\mathbb{N}:\ \dfrac{4}{10}a_n+\dfrac{3}{10}b_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\left(\dfrac{1}{3}a_0+\dfrac{1}{4}b_0\right)=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ a_n=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ et $a_0=1$ ; $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ b_n=\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ et $b_0=0$.

**6.** $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ c_n=1-a_n-b_n=1-\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ et $c_0=0$.

$0<\dfrac{5}{6}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=1$ ; ce qui signifie que la guêpe finira par sortir !