EXERCICE 1

Soit $\mathcal{P}$ la proposition :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad (x^2 \geq 1) \Rightarrow (x \geq 1)$$

1. Ecrire la négation de $\mathcal{P}$.

2. Montrer que $\mathcal{P}$ est fausse.

EXERCICE 2

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2,$$

par deux méthodes :

1. en utilisant une démonstration par récurrence ;

2. en s'appuyant sur la somme classique $\sum_{k=1}^{n} k$.

EXERCICE 3

1. Montrer qu'il existe trois réels *a*, *b*, et *c*, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0;-1;1\}, \qquad \frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

2. En déduire, en fonction de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, l'expression de :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k},$$

puis déterminer la limite de $(S_n)_{n \geq 2}$ lorsque *n* tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

i) $|x-3| < |2x+4|$

ii) $\sqrt{x^2+1} \geq 2x-1$

iii) $\sqrt{|x^2-1|} \geq 1$

T.S.V.P.

PROBLEME

1. On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{2x}{1-x^2}-\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

a) Donner le domaine de définition de g, noté D_g.

b) Etudier la parité de g.

c) Montrer qu'il existe deux réels a et b, tels que :

$$\forall x\in D_g,\qquad g(x)=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{x+1}+\ln|1-x|-\ln|1+x|$$

d) Etudier les limites de $g(x)$ aux bornes de son domaine de définition, pour x positif.

e) Etudier les variations de g, et dresser son tableau de variations.

f) En déduire le signe de $g(x)$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

a) Donner le domaine de définition de f.

b) Etudier la parité de f .

c) Etudier les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition, pour x positif.

d) Etudier les variations de f, et dresser son tableau de variations.

e) En déduire, en fonction du paramètre réel a, le nombre de solution(s) positive(s) de l'équation :

$$\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=ax$$