EXERCICE 1

Soit $\mathcal{P}$ la proposition :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad (x^2 \geq 1) \Rightarrow (x \geq 1)$$

1. Ecrire la négation de $\mathcal{P}$. $(\exists x \in \mathbb{R}) \qquad (x^2 \geq 1) \wedge (x < 1)$

2. Montrer que $\mathcal{P}$ est fausse. Pour x = -2, $(x^2 \geq 1) \wedge (x < 1)$, ainsi $\urcorner \mathcal{P}$ est vraie, donc $\mathcal{P}$ est fausse.

EXERCICE 2

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2,$$

par deux méthodes :

1. en utilisant une démonstration par récurrence ;

Soit pour tout entier naturel n la propriété P(n) = $\left(\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2 \right)$

$\sum_{k=0}^{0} (2k+1) = 1 = (0+1)^2$ donc P(0) est vraie.

Supposons P(n) vraie pour un entier naturel n.

$$\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) + 2(n+1) + 1 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = (n+1+1)^2 = (n+2)^2$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathrm{P}(n) \text{ vraie}) \Rightarrow (\mathrm{P}(n+1) \text{ vraie})$

La propriété P(n) est vraie pour n = 0, héréditaire pour tout entier n, par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

2. en s'appuyant sur la somme classique $\sum_{k=1}^{n} k$.

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2$$

EXERCICE 3

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b, et c, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; 1\}, \qquad \frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; 1\}, \qquad \frac{1}{x^3 - x} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

2. En déduire, en fonction de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, l'expression de :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k},$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{-1}{k} + \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2(k+1)} \right) = -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}$$

en changeant l'indice dans la deuxième somme ($i = k - 1$), et dans la troisième ($i = k + 1$), on obtient :

$$S_n = -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right),$$

par télescopage.

puis déterminer la limite de $(S_n)_{n \geq 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{4}$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

i) $|x - 3| < |2x + 4|$ $\quad S = \left]-\infty; -7\right[\cup \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$

ii) $\sqrt{x^2 + 1} \geq 2x - 1$ $\quad S = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$

iii) $\sqrt{|x^2 - 1|} \geq 1$ $\quad S = \left]-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right[$

PROBLEME

1. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{2x}{1 - x^2} - \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|$$

a) Donner le domaine de définition de g, noté D_g. $D_g = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$

b) Etudier la parité de g.

D_g est centré en 0 ; $\forall x \in D_g$, $g(-x) = \frac{-2x}{1 - x^2} - \ln\left|\frac{1 - x}{1 + x}\right| = -\frac{2x}{1 - x^2} + \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| = -g(x)$. g est impaire.

Il suffit donc d'étudier g sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

c) Montrer qu'il existe deux réels a et b, tels que :

$$\forall x \in D_g, \qquad g(x) = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{x + 1} + \ln|1 - x| - \ln|1 + x|$$

$$\forall x \in D_g, \qquad g(x) = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{x + 1} + \ln|1 - x| - \ln|1 + x|$$

d) Etudier les limites de $g(x)$ aux bornes de son domaine de définition, pour x positif.

- $g(0) = 0$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{1}{1-x}+\ln|1-x|\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{1}{1-x}\left(1+(1-x)\ln|1-x|\right)\right)=+\infty$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)=+\infty$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2x}{1-x^2}=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=+\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x+1}-\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)=0$

e) Etudier les variations de g, et dresser son tableau de variations.

g est dérivable sur son domaine, car les fonctions rationnelles et la fonction ln le sont.

$\forall x\in D_g,\ g'(x)=\frac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\geq 0$,

la fonction g est donc croissante sur chacun de ses intervalles de définition.

Remarque : La fonction g étant impaire, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

f) En déduire le signe de $g(x)$.

$g(0) = 0$, on déduit des variations de g que : $\left(g(x)\geq 0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left[0;1\right[\right)$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

a) Donner le domaine de définition de f. $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right[\cup\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

b) Etudier la parité de f. D_f est centré en 0, et $\forall x\in D_f$, $f(-x)=\frac{1}{-x}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=f(x)$, f est paire.

c) Etudier les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition pour x positif.

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln|1+x|}{x}-\frac{\ln|1-x|}{x}\right)=2$ car $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln|1+h|}{h}=1$ (taux d'accroissement).
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

d) Etudier les variations de *f*, et dresser son tableau de variations.

f est dérivable sur son domaine, car les fonctions rationnelles et la fonction ln le sont.

$\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

Remarque : La fonction *f* étant paire, on a : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g(x)$		‖		‖	
f	0 ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 2 ‖ 2 ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 0

e) En déduire, en fonction du paramètre réel *a*, le nombre de solution(s) positive(s) de l'équation :

$$\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = ax$$

$x = 0$ est solution de l'équation quel que soit le réel *a*.

Si $x \neq 0$, résoudre l'équation $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = ax$ revient à résoudre $f(x) = a$.

La fonction *f* est continue sur son domaine, le théorème des valeurs intermédiaires donne :

- Pas de solution pour $a \leq 0$
- Une unique solution (qui se trouve dans $]1;+\infty[$) pour $0 < a \leq 2$
- Deux solutions (une dans $]0;1[$ l'autre dans $]1;+\infty[$) pour $a > 2$.