EXERCICE 1

1. Question de cours :

a) Donner les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions Arcsin et Arccos.

b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} \; ,$$

où I est un intervalle à préciser.

2. Tracer dans un repère orthonormé la courbe sur $[-\pi;\pi]$ de la fonction

$$h : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\sin(x)),$$

en détaillant la méthode.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition de *f* ainsi que son domaine de dérivabilité.

b) Calculer $f(\tan(\alpha))$, pour $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

d) Retrouver le résultat précédent en dérivant *f*.

EXERCICE 2

Soit cotan la fonction définie par : $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Donner les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction cotan.

2. Justifier l'existence de Arccotan, la fonction réciproque de cotan sur $]0;\pi[$, et donner son ensemble de définition D.

3. Déterminer le domaine de dérivabilité de Arccotan, et calculer sa dérivée.

4. Vérifier que : $\forall x \in \mathrm{D}$, $\operatorname{Arccotan} x + \operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2}$.

T.S.V.P.

EXERCICE 3

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{ix} - 1 = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{ix}{2}}$$

2. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument de

$$\omega^k - 1$$

3. Calculer :

$$T = 2\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}$$

On donnera le résultat sous forme algébrique.

4. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|$. Montrer que :

$$S = \frac{2}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}.$$

EXERCICE 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0.$$

On précisera la (ou les) solution(s) en fonction de la valeur de α.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$z^{2n} - 2z^n \cos(n\alpha) + 1 = 0.$$

On précisera les solutions en fonction de la valeur de α.