EXERCICE 1

1. Question de cours :

a) Donner les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions Arcsin et Arccos.
Elles sont définies sur [-1 ; 1], dérivables sur]-1 ; 1[.

b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} \ ,$$

où I est un intervalle à préciser.
La fonction $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x)$ est dérivable sur]-1 ; 1[, et :

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 .$$

La fonction f est donc constante sur]-1 ; 1[, et comme elle est continue sur [-1 ; 1] (car Arcsin et Arccos le sont), elle est constante sur [-1 ; 1].

$$\forall x \in \left[-1;1\right], \quad f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

2. Tracer dans un repère orthonormé la courbe sur $\left[-\pi;\pi\right]$ de la fonction

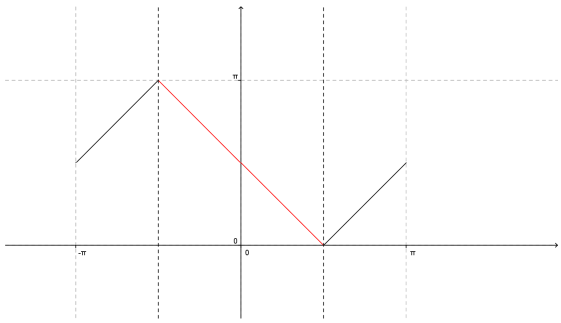
$$h : x \mapsto \mathrm{Arccos}(\sin(x)),$$

en détaillant la méthode.
$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(x) \in \left[-1;1\right]$ donc la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$, et d'après la question précédente on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(\sin(x))$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(\pi - x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(\sin(\pi - x)) = h(x)$, la courbe représentative de h admet donc dans un repère orthonormé la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(-\pi - x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(\sin(-\pi - x)) = h(x)$, la courbe représentative de h admet donc dans un repère orthonormé la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

De plus, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \quad h(x) = \frac{\pi}{2} - x$.



Remarque : On aurait aussi pu voir que :

$$\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = \begin{cases} x, & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & \forall x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \\ -\pi - x, & \forall x \in \left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \qquad \text{d'où : } h(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x - \frac{\pi}{2}, & \forall x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \\ x + \frac{3\pi}{2}, & \forall x \in \left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition de *f* ainsi que son domaine de dérivabilité.

La fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction Arccos est définie sur [-1 ; 1] dérivable sur]-1 ; 1[, ainsi f est définie sur D tel que $\forall x \in D : -1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$, et dérivable sur D' tel que $\forall x \in D' : -1 < \dfrac{2x}{1+x^2} < 1$.

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2|x| + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (|x|-1)^2.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée sur $\mathbb{R}$, avec égalité si et seulement si $|x| = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1;1\}$.

Ainsi *f* est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

b) Calculer $f(\tan(\alpha))$, pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$\forall \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f(\tan(\alpha)) = \operatorname{Arccos}(\sin(2\alpha))$, (en utilisant les formules de trigonométrie),

Donc, d'après la question 2 : $f(\tan(\alpha)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\alpha, \forall \alpha \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \\ 2\alpha - \frac{\pi}{2}, \forall \alpha \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\\ 2\alpha + \frac{3\pi}{2}, \forall \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$

c) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}(x), \forall x \in [-1;1] \\ 2\operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}, \forall x \in [1;+\infty[\\ 2\operatorname{Arctan}(x) + \frac{3\pi}{2}, \forall x \in]-\infty;-1] \end{cases}$$

d) Retrouver le résultat précédent en dérivant *f*.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\} : f'(x) = \frac{-(2-2x^2)}{(1+x^2)^2\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{-2+2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-2x^2+x^4}} = \frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)|x^2-1|}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2} & \forall x \in\in \left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[\\ \dfrac{-2}{1+x^2} & \forall x\in\left]-1;1\right[\end{cases},$$

on en déduit qu'il existe trois réels C_1, C_2 et C_3 tels que : $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{Arctan}(x)+C_1, & \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\\ 2\mathrm{Arctan}(x)+C_2, & \forall x\in\left]1;+\infty\right[\\ -2\mathrm{Arctan}(x)+C_3, & \forall x\in\left]-1;1\right[\end{cases}$

La continuité de f sur son domaine de définition (comme composée de fonctions continues), permet de déterminer les constantes à l'aide des valeurs de f en -1 et 1 :

$f(1) = 0$ donne $C_2=-\dfrac{\pi}{2}$ et $C_3=\dfrac{\pi}{2}$, $f(-1)=\pi$ donne $C_1=\dfrac{3\pi}{2}$, et confirme $C_3=\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2

Soit cotan la fonction définie par : $\mathrm{cotan}(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Donner les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction cotan.

Les fonctions sin et cos sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$; la fonction cotan est donc définie et dérivable là où le sinus ne s'annule pas : $\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]k\pi;(k+1)\pi\right[$

2. Justifier l'existence de Arccotan, la fonction réciproque de cotan sur $\left]0;\pi\right[$, et donner son ensemble de définition D.

Sur $\left]0;\pi\right[$, la fonction cotan est dérivable et $\mathrm{cotan}'(x)=\dfrac{-1}{\sin^2(x)}<0$. Ainsi, la fonction est continue, strictement décroissante. Elle définit donc une bijection de $\left]0;\pi\right[$ sur $\mathrm{cotan}\left(\left]0;\pi\right[\right)$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{cotan}(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi^-}\mathrm{cotan}(x)=-\infty$, on en déduit que la bijection réciproque de cotan sur $\left]0;\pi\right[$ est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer le domaine de dérivabilité de Arccotan, et calculer sa dérivée.

La fonction cotan est dérivable sur $\left]0;\pi\right[$, et sa dérivée ne s'y annule pas.

La fonction Arccotan est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{Arccotan}'(x)=\frac{1}{\mathrm{cotan}'(\mathrm{Arccotan}(x))}=-\sin^2(\mathrm{Arccotan}(x)).$$

De plus : $\forall x\in\left]0;\pi\right[,\ \mathrm{cotan}^2(x)=\dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}=\dfrac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)}=\dfrac{1}{\sin^2(x)}-1$, d'où :

$\forall x\in\left]0;\pi\right[,\ \dfrac{1}{\sin^2(x)}=\mathrm{cotan}^2(x)+1$, et donc : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{Arccotan}'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$

4. Vérifier que : $\forall x\in D$, Arccotan x + Arctan x = $\dfrac{\pi}{2}$.

Les fonctions Arccotan et Arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{Arccotan}'(x)+\mathrm{Arctan}'(x)=0$.

La fonction Arccotan + Arctan est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Elle vaut $\frac{\pi}{2}$ en 0 (car $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc $\operatorname{Arccotan}(0)=\frac{\pi}{2}$ et Arctan(0) = 0), ainsi

$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{Arccotan}(x)+\operatorname{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 3

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad e^{ix}-1=2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad e^{ix}-1=e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{\frac{-ix}{2}}\right)=e^{\frac{ix}{2}}2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

2. Soit $k\in[\![1;n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument de

$$\omega^k-1$$

D'après la question précédente, on a : $\omega^k-1=e^{\frac{2k\pi}{n}i}-1=e^{\frac{ik\pi}{n}}2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

De plus : $k\in[\![1;n-1]\!]$, donc $\frac{k\pi}{n}\in\left[\frac{\pi}{n};\frac{(n-1)\pi}{n}\right]\subset\,]0;\pi[$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)>0$;

on a donc : $\left|\omega^k-1\right|=2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et , à 2π -près : $\arg\left(\omega^k-1\right)=\arg\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)=\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}$

3. Calculer :

$$T=2\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{ik\pi}{n}}$$

On donnera le résultat sous forme algébrique.

Il s'agit de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{i\pi}{n}}$:

$$T=2\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{ik\pi}{n}}=2\frac{1-\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}=2\frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}=\frac{4\left(1-e^{\frac{-i\pi}{n}}\right)}{\left|1-e^{\frac{i\pi}{n}}\right|^2}=2+2i\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

4. On pose $S=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\omega^k-1\right|$. Montrer que :

$$S=\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\omega^k-1\right|=\sum_{k=0}^{n}2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\operatorname{Im}\left(2\sum_{k=0}^{n}e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

EXERCICE 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0.$$

On précisera la (ou les) solution(s) en fonction de la valeur de α.

$\Delta = 4\left(\cos^2\alpha - 1\right) = -4\sin^2\alpha$;

On note S l'ensemble des solutions.

Si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, $\Delta = 0$ et $S = \{1\}$;

Si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$, $\Delta = 0$ et $S = \{-1\}$;

Sinon: $\Delta = \left(2i\sin\alpha\right)^2$, et $S = \left\{e^{i\alpha}; e^{-i\alpha}\right\}$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$z^{2n} - 2z^n\cos\left(n\alpha\right) + 1 = 0.$$

On précisera les solutions en fonction de la valeur de α.

On pose $Z = z^n$, on a alors : $Z^2 - 2Z\cos\left(n\alpha\right) + 1 = 0$;

On note S l'ensemble des solutions.

On déduit de la question précédente :

Si $\alpha = \dfrac{2p\pi}{n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $Z^n = 1$ donc $S = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}; k \in [\![0; n-1]\!]\right\}$

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{n} + \dfrac{2p\pi}{n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $Z^n = -1$ donc $S = \left\{e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}; k \in [\![0; n-1]\!]\right\}$

Sinon: $Z^n \in \left\{e^{in\alpha}; e^{-in\alpha}\right\}$ donc $S = \left\{e^{i\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)}; k \in [\![0; n-1]\!]\right\} \cup \left\{e^{i\left(-\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)}; k \in [\![0; n-1]\!]\right\}$