EXERCICE 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh} \frac{1}{k}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2 \operatorname{sh} x + 1 = 0$$

On notera α son unique solution que l'on exprimera à l'aide de la fonction ln.

b) Montrer que

$$f(\alpha) = \frac{3}{4}$$

c) Etudier les variations de f et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sh} x} - x - 1$$

a) Etudier les variations de g' puis celles de g, et enfin, en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$$

b) Montrer que

$$\forall x \in [0;1[, 1 + x \leq \mathrm{e}^{\operatorname{sh} x} \leq \frac{1}{1-x}$$

3. **a)** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Montrer que

$$\forall k \in [\![n;np]\!], \frac{k+1}{k} \leq \mathrm{e}^{\operatorname{sh} \frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k-1}$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$,

$$\frac{np+1}{n} \leq \mathrm{e}^{S_n} \leq \frac{np}{n-1}$$

c) Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} S_n$$

T.S.V.P.

EXERCICE 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ suivant

$$\begin{cases} (a+2)x+2y+3z=0 \\ 6x+(a+1)y+6z=0 \\ -4x-2y+(a-5)z=0 \end{cases}$$

EXERCICE 3

Etant donné $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on considère

$$f(z)=\frac{z+i}{z-2i}.$$

On se place dans le plan complexe. Par la méthode de votre choix (géométrique ou algébrique), déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :

a) $f(z)$ est un nombre réel ;

b) $f(z)$ est un imaginaire pur ;

c) $f(z) = e^{\frac{i\pi}{3}}$.

EXERCICE 4

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1+i$, $z_B=2i$, et $z_C=1+3i$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$, et la translation t de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

a) Expliciter les applications complexes associées aux transformations r, h et t.

b) Exprimer l'affixe du point M', image du point M d'affixe z par la transformation $r \circ h \circ t$.

c) A quelle condition portant sur M a-t-on M' = A ?

EXERCICE 5

On considère l'équation

$$z^3-(1+4i)z^2+(-1+7i)z+12+4i=0.$$

1. Montrer que cette équation a une solution imaginaire pure.

2. Résoudre alors l'équation.