EXERCICE 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\frac{1}{k}$. Le but de cet exercice est de déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : 2 sh x + 1 = 0
On notera α son unique solution que l'on exprimera à l'aide de la fonction ln.

En posant $X = e^x$, l'équation équivaut à : $\begin{cases} X^2 + X - 1 = 0 \\ X > 0 \end{cases}$, d'où : $\alpha = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

b) Montrer que : $f(\alpha) = \frac{3}{4}$

$$f(\alpha) = \left(\frac{e^{\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} + e^{-\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}}{2}\right)^2 + \frac{e^{\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} - e^{-\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right) = \frac{3}{4}$$

__Autre méthode__ : Bien plus rapide !!!

Par définition de α : 2 sh α = -1, donc $\operatorname{sh}^2(\alpha) = \frac{1}{4}$, et par suite $\operatorname{ch}^2(\alpha) = 1 + \operatorname{sh}^2(\alpha) = \frac{5}{4}$ d'où :

$f(\alpha) = \operatorname{ch}^2(\alpha) + \operatorname{sh}(\alpha) = \frac{3}{4}$

c) Etudier les variations de f et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car ch et sh le sont, et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \operatorname{ch}(x)\left(2\operatorname{sh}(x) + 1\right)$.

La fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même de la fonction $x \mapsto 2\operatorname{sh}(x) + 1$ (par composition). On sait que cette fonction s'annule en α, on en déduit son signe, et par suite, celui de $f'(x)$: $\left(f'(x) < 0\right) \Leftrightarrow (x < \alpha)$.

Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

Finalement, la fonction f atteint son minimum en α, et comme $f(\alpha) = \frac{3}{4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = e^{\operatorname{sh} x} - x - 1$

a) Etudier les variations de g' puis celles de g, et enfin, en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \operatorname{ch}(x)e^{\operatorname{sh} x} - 1$.

g' est également dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = \operatorname{sh}(x)e^{\operatorname{sh} x} + \operatorname{ch}^2(x)e^{\operatorname{sh} x} = f(x)e^{\operatorname{sh} x} > 0$.

Ainsi la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $g'(0) = 0$, on en déduit que $\left(g'(x) < 0\right) \Leftrightarrow (x < 0)$, et par suite que g est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Finalement, la fonction g atteint son minimum en 0, et comme $g(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.

b) Montrer que $\forall x \in [0;1[, 1+x \leq e^{\operatorname{sh} x} \leq \dfrac{1}{1-x}$

D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\operatorname{sh} x} \geq x+1$.
L'inégalité est donc vraie sur [0 ; 1[.
De plus, en posant $x = -X$, on a : $\forall X \in \mathbb{R}, e^{\operatorname{sh}(-X)} \geq -X+1$, d'où (la fonction sh étant impaire) :

$\forall X \in \mathbb{R}, e^{-\operatorname{sh}(X)} \geq -X+1$ soit encore : $\dfrac{1}{e^{\operatorname{sh}(X)}} \geq 1-X$.

En prenant X dans [0 ; 1[, on a $1 - X > 0$ et donc : $e^{\operatorname{sh}(X)} \leq \dfrac{1}{1-X}$.

3. **a)** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Montrer que : $\forall k \in [\![n;np]\!], \dfrac{k+1}{k} \leq e^{\operatorname{sh}\frac{1}{k}} \leq \dfrac{k}{k-1}$

$\forall k \in [\![n;np]\!], \dfrac{1}{k} \in [0;1[$, on déduit de ce qui précède que :

$1+\dfrac{1}{k} \leq e^{\operatorname{sh}\frac{1}{k}} \leq \dfrac{1}{1-\frac{1}{k}}$, ce qui équivaut à $\dfrac{k+1}{k} \leq e^{\operatorname{sh}\frac{1}{k}} \leq \dfrac{k}{k-1}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $\dfrac{np+1}{n} \leq e^{S_n} \leq \dfrac{np}{n-1}$

$\forall k \in [\![n;np]\!]$, $0 < \dfrac{k+1}{k} \leq e^{\operatorname{sh}\frac{1}{k}} \leq \dfrac{k}{k-1}$ en multipliant membres à membres les inégalités, on obtient :

$\prod_{k=n}^{np} \dfrac{k+1}{k} \leq \prod_{k=n}^{np} e^{\operatorname{sh}\frac{1}{k}} \leq \prod_{k=n}^{np} \dfrac{k}{k-1}$, ce qui (par télescopage) équivaut à : $\dfrac{np+1}{n} \leq e^{S_n} \leq \dfrac{np}{n-1}$

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{np+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{np}{n-1} = p$, donc par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{S_n} = p$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln p$ (par continuité de la fonction ln.)

EXERCICE 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ suivant

$$\begin{cases} (a+2)x+2y+3z=0 \\ 6x+(a+1)y+6z=0 \\ -4x-2y+(a-5)z=0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est : $\begin{cases} \{(x;-2x;0), x \in \mathbb{R}\} & \text{si } a=2 \\ \{(x;0;-x), x \in \mathbb{R}\} & \text{si } a=1 \\ \{(x;x;-x), x \in \mathbb{R}\} & \text{si } a=-1 \\ \{(0;0;0)\} & \text{sinon} \end{cases}$

EXERCICE 3

Etant donné $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on considère

$$f(z) = \frac{z+i}{z-2i}.$$

On se place dans le plan complexe. Par la méthode de votre choix (géométrique ou algébrique), déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :

Si on note A le point d'affixe $-i$, B le point d'affixe $2i$, et M le point d'affixe z, on a $f(z) = \frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}$

a) $f(z)$ est un nombre réel ;

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\text{A=M}) \vee \left(\arg\left(z_{\overrightarrow{AM}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{BM}}\right) = \left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) = 0[\pi]\right)$$

L'ensemble des solutions est donc la droite (AB), privée du point B (car $z \neq 2i$).

b) $f(z)$ est un imaginaire pur

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (\text{A=M}) \vee \left(\arg\left(z_{\overrightarrow{AM}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{BM}}\right) = \left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]\right)$$

L'ensemble des solutions est donc le cercle de diamètre [AB], privée du point B (car $z \neq 2i$).

c) $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$.

$$f(z) = \frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}} = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow \left(\left|\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\right| = 1\right) \wedge \left(\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]\right) \Leftrightarrow (\text{AM=BM}) \wedge \left(\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]\right)$$

L'ensemble des solutions est donc le M tel que le triangle AMB soit équilatéral de sens direct.

__Remarque__ : une résolution algébrique conduit à l'unique point P d'affixe $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

EXERCICE 4

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = 2i$, et $z_C = 1+3i$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = i$ donc $\frac{BC}{BA} = \left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$ et $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, le triangle ABC est donc rectangle isocèle en *B*.

2. On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$, et la translation t de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

a) Expliciter les applications complexes associées aux transformations r, h et t.

Pour r : $z \mapsto i(z-1-i)+1+i$ soit encore : $z \mapsto iz+2$

Pour h : $z \mapsto \frac{1}{2}(z-1-3i)+1+3i$ soit encore : $z \mapsto \frac{1}{2}z+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

Pour t : $z \mapsto z+1-i$

b) Exprimer l'affixe du point M', image du point M d'affixe z par la transformation $r \circ h \circ t$.

$z \mapsto i\left(\frac{1}{2}(z+1-i)+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+2$ soit encore : $z \mapsto \frac{i}{2}z+1+i$

c) A quelle condition portant sur M a-t-on M' = A ?

M' = A $\Leftrightarrow \left(\frac{i}{2}z+1+i=1+i\right) \Leftrightarrow (z=0) \Leftrightarrow$ M = O

EXERCICE 5

On considère l'équation

$$z^3-(1+4i)z^2+(-1+7i)z+12+4i=0.$$

1. Montrer que cette équation a une solution imaginaire pure.

Soit $y \in \mathbb{R}$. iy est solution de l'équation si et seulement si :

$$-iy^3+(1+4i)y^2+(-i-7)y+12+4i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-7y+12=0 \\ -y^3+4y^2-y+4=0 \end{cases}$$

La première équation donne $y = 3$ ou $y = 4$. En remplaçant dans la seconde équation, on trouve $y = 4$.

Ainsi, l'équation initiale admet $z = 4i$ comme solution.

2. Résoudre alors l'équation.

Le résultat précédent donne la factorisation suivante :

$$z^3-(1+4i)z^2+(-1+7i)z+12+4i=(z-4i)(z^2-z-1+3i)$$

La résolution de $z^2+z-1+3i = 0$ donne $z = -1+i$ ou $z = 2-i$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation est : $\{4i\ ;\ -1+i\ ;\ 2-i\}$.