EXERCICE 1

Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note I_3 la matrice identité, 0_3 la matrice nulle, et on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Calcul matriciel.

1. Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1}.
2. Montrer que $(P - I_3)^3 - 2P = 0_3$. En déduire que P est inversible, et calculer P^{-1}.
3. Montrer que AP = PT.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$

   Cette égalité est-elle également valable pour $n = -1$?
5. En remarquant que T = D + N où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   déterminer T^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Donner l'expression détaillée de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie 2 : Application à la détermination du commutant de A

1. Montrer qu'une matrice M commute avec A si, et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec T.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec T.
3. En déduire toutes les matrices qui commutent avec A.

EXERCICE 2

Soit α un réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

Partie 1 : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha x + \dfrac{\alpha}{x} \end{array} \right.$.

Un repère du plan étant fixé, on note $\mathscr{C}_f$ le graphe de f.

1. Dresser le tableau de variations complet de f.
2. Etudier la position relative de la droite Δ d'équation $y = x$ et de $\mathscr{C}_f$ sur $]0;+\infty[$.

   (On distinguera deux cas : $1 \le \alpha$ et $\frac{1}{2} < \alpha < 1$).
3. Justifier que l'intervalle $[1;+\infty[$ est stable par f.

T.S.V.P.

Partie 2 : Etude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in [1;+\infty[\\ u_{n+1} = \alpha u_n + \dfrac{\alpha}{u_n},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

2. Démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.

3. Dans le cas où $1 \leq \alpha$, démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge.

4. Dans le cas où $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.