EXERCICE 1

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note I_3 la matrice identité, 0_3 la matrice nulle, et on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Calcul matriciel.

1. Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1}.

On montrer que A est inversible en calculant son inverse, par la méthode de l'algorithme de Gauss ;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3 & -7/2 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que $(P - I_3)^3 - 2P = 0_3$. En déduire que P est inversible, et calculer P^{-1}.

On montre aisément l'égalité $(P - I_3)^3 - 2P = 0_3$; en développant, on obtient :

$P^3 - 3P^2 + P - I_3 = 0_3$, soit encore : $P(P^2 - 3P + I_3) = I_3$.

On en déduit que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = P^2 - 3P + I_3$.

De $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, on obtient : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Montrer que AP = PT. En calculant les produits, on obtient : $AP = PT = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$. Se montre par une récurrence immédiate.

Cette égalité est-elle également valable pour $n = -1$?

De AP = PT, A et P étant inversibles, on déduit que T (qui vaut $P^{-1}AP$) est inversible et $(AP)^{-1} = (PT)^{-1}$ ce qui donne $P^{-1}A^{-1} = T^{-1}P$, ou encore $A^{-1} = P\,T^{-1}P$; l'égalité est donc vraie pour $n = -1$.

5. En remarquant que T = D + N où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer T^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On a : $DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc D et N commutent.

On peut appliquer la formule du binôme de Newton : $T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} D^{n-k}N^k$.

Par ailleurs, on a : $N^2 = 0_3$ donc $\forall k \geq 2,\ N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3$ et $D^{n-k} = \begin{pmatrix} (-1)^{n-k} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-k} \end{pmatrix}$, d'où

$$T^n = \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

6. Donner l'expression détaillée de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

En calculant PT^n puis PT^nP^{-1}, on obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} (2-n)2^n + (-1)^n & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & (n-2)2^n + 2(-1)^n \\ -n2^{n-1} & 2^n & n2^{n-1} \\ (1-n)2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + 2(-1)^n & (n-1)2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

<u>Partie 2 : Application à la détermination du commutant de A</u>

1. Montrer qu'une matrice M commute avec A si, et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec T.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice P étant inversible, on a :

$$AM = MA \Leftrightarrow AMP = MAP \underset{AP=PT}{\underbrace{\Leftrightarrow}} AMP = MPT \Leftrightarrow P^{-1}AMP = P^{-1}MPT \underset{P^{-1}A=TP^{-1}}{\underbrace{\Leftrightarrow}} TP^{-1}MP = P^{-1}MPT.$$

On conclut qu'une matrice M commute avec A si, et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec T.

2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec T.

On pose $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$; par le calcul (un peu fastidieux…) l'égalité $RT = TR$ conduit à :

$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, avec a, e et f réels quelconques.

3. En déduire toutes les matrices qui commutent avec A.

D'après les questions précédentes, les matrices M qui commutent avec A sont telles que :

$P^{-1}MP = R$ c'est-à-dire $M = PRP^{-1}$. Le calcul donne les matrices qui commutent avec A de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 2e-2f-a & 2e-2a & 2f-2e+2a \\ -f & e & f \\ e-2f-a & 2e-2a & 2f-e+2a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

où a, e et f sont des réels quelconques.

EXERCICE 2

Soit α un réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

Partie 1 : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie par : $f:\left|\begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha x+\dfrac{\alpha}{x} \end{array}\right.$.

Un repère du plan étant fixé, on note $\mathcal{C}_f$ le graphe de f.

1. Dresser le tableau de variations complet de f.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\alpha\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$; les limites aux bornes sont évidentes. On obtient :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	2α	$\nearrow$	$+\infty$

2. Etudier la position relative de la droite Δ d'équation $y=x$ et de $\mathcal{C}_f$ sur $]0;+\infty[$.

(On distinguera deux cas : $1\le\alpha$ et $\frac{1}{2}<\alpha<1$).

$\forall x\in\,]0;+\infty[,\ f(x)-x=\dfrac{(\alpha-1)x^2+\alpha}{x}$; ainsi :

Si $1\le\alpha$: $\forall x\in\,]0;+\infty[,\ f(x)-x>0$, et Δ est en dessous de $\mathcal{C}_f$ sur $]0;+\infty[$;

Si $\frac{1}{2}<\alpha<1$: $\forall x\in\,]0;+\infty[,\ f(x)-x=\dfrac{\alpha-1}{x}\left(x^2-\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)$; $\frac{1}{2}<\alpha<1$ donc $0<\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ et $\alpha-1<0$, on en déduit que Δ est en dessous (resp. au-dessus) de $\mathcal{C}_f$ sur $\left]0;\sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}\right]\left(\text{resp. } \left[\sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}};+\infty\right[\right)$.

3. Justifier que l'intervalle $[1;+\infty[$ est stable par f.

De la première question, il vient que $\forall x\in\,]0;+\infty[,\ f(x)\ge 2\alpha$, et comme $\alpha>\frac{1}{2}$, on a $\forall x\in\,]0;+\infty[,\ f(x)>1$, et en particulier : $\forall x\in[1;+\infty[,\ f(x)\ge 1$, ce qui signifie que l'intervalle $[1;+\infty[$ est stable par f.

Partie 2 : Etude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\ge 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0\in[1;+\infty[\\ u_{n+1}=\alpha u_n+\dfrac{\alpha}{u_n},\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\ge0}$ est bien définie et que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\ge 1$.

$[1;+\infty[$ est stable par f et $u_0\in[1;+\infty[$. Une récurrence immédiate donne les résultats attendus.

2. Démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.

On a montré dans la première partie que f est croissante sur $[1;+\infty[$, donc (u_n) est monotone.

3. Dans le cas où $1 \leq \alpha$, démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge.

Dans le cas où $1 \leq \alpha$, on a montré à la question **2** de la partie 1 que $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) - x > 0$;

on en déduit que f n'admet pas de point fixe dans $[1;+\infty[$, donc que (u_n) diverge.

Remarque : on a montré que (u_n) est monotone ; comme $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 > 0$, on en déduit que (u_n) est croissante. Comme elle diverge, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4. Dans le cas où $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Dans le cas où $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, on a $1 < \frac{\alpha}{1-\alpha}$ et, comme montré dans la question **2** de la partie 1,

$\forall x \in \left[1;\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right], f(x) - x \geq 0$, et $\forall x \in \left[\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}};+\infty\right[, f(x) - x \leq 0$.

f étant continue et strictement monotone sur $[1;+\infty[$, f admet $\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ pour unique point fixe dans $[1;+\infty[$ et les intervalles $\left[1;\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}};+\infty\right[$ sont stables par f.

On en déduit que :

si $u_0 \in \left[1;\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$, alors (u_n) est majorée par $\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ et croissante (car $f(u_0) - u_0 \geq 0$), donc elle converge vers le point fixe de f ;

si $u_0 \in \left[\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}};+\infty\right[$, alors (u_n) est minorée par $\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ et décroissante (car $f(u_0) - u_0 \leq 0$), donc elle converge vers le point fixe de f.

Dans tous les cas, (u_n) converge vers $\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.