EXERCICE 1

Pour x réel, l'espace étant muni d'un repère orthonormé, on pose $\vec{u}(2-x;2;-1)$, $\vec{v}(-2;-3-x;2)$, $\vec{w}(1;2;-x)$, et $P(x)=\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} 2-x & -2 & 1 \\ 2 & -3-x & 2 \\ -1 & 2 & -x \end{vmatrix}$.

1. Montrer que P est une fonction polynômiale de degré 3, et déterminer ses racines.
2. Pour quelles valeurs de x, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

EXERCICE 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ le graphe de f.

1. a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

   b) Déterminer la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, et sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

2. a) Montrer que :

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{=}x+1+\frac{3}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

   b) Conséquence ?

EXERCICE 3

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)^n.$$

1. Démontrer que :

$$\forall k\in[\![0;n]\!],\ f_n^{(k)}(0)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}p^k$$

2. Rappeler le théorème de Taylor-Young. En déduire l'existence et la forme du développement limité de f_n à l'ordre n en 0.
3. Indépendamment de ce qui précède, en utilisant un équivalent de e^x-1 lorsque x tend vers 0, justifier que

$$f_n(x)\underset{x\to0}{=}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)$$

4. En déduire la valeur de $\alpha_k=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}p^k$, pour $k\in[\![0;n]\!]$.

T.S.V.P.

EXERCICE 4

Soit f définie sur $[-1;1]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\text{Arc}\cos(x)$$

et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n).$$

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.
2. On admet que $\pi^2<12$. Montrer que f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, et qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right], |f'(x)|\leq k<1.$$
3. Montrer qu'il existe un unique réel $a\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ tel que $f(a)=a$.
4. Prouver alors que :
$$\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-a|\leq k|u_n-a| \text{ puis que } \forall n\in\mathbb{N}, |u_n-a|\leq k^n|u_0-a|.$$
5. Conclusion ?

EXERCICE 5

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

f est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Par récurrence, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x\in\mathbb{R}, f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$
2. En remarquant que $\forall x\in\mathbb{R}, (1+x^2)f(x)=1$, montrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R}, (1+x^2)f'(x)+2xf(x)=0.$$
3. Enoncer la formule de Leibniz, en précisant bien les conditions d'application.
4. En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}, P_{n+1}(x)+2(n+1)xP_n(x)+n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x)=0.$$