EXERCICE 1

Pour x réel, l'espace étant muni d'un repère orthonormé, on pose $\vec{u}(2-x;2;-1)$, $\vec{v}(-2;-3-x;2)$, $\vec{w}(1;2;-x)$, et $P(x) = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 1 \\ 2 & -3-x & 2 \\ -1 & 2 & -x \end{vmatrix}$.

1. Montrer que P est une fonction polynômiale de degré 3, et déterminer ses racines.

Le calcul de $P(x)$ donne : $P(x) = -x^3 - x^2 + 5x - 3$. P est donc une fonction polynômiale de degré 3.
1 est une racine évidente de P. Par division euclidienne, on obtient : $P(x) = (x-1)(-x^2 - 2x + 3)$, d'où l'on déduit que 1 est racine double, et -3 est racine simple.

2. Pour quelles valeurs de x, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si leur déterminant, c'est-à-dire $P(x)$, est nul.
Ainsi, les vecteurs sont coplanaires si, et seulement si $x \in \{1;-3\}$.

EXERCICE 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ le graphe de f.

1. a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

Pour $x \neq 1$, $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = -x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{1-x}$, on en déduit que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x(1+o(x))(1+x+o(x)) \underset{x\to 0}{=} -x - x^2 + o(x^2).$$

b) Déterminer la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, et sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

On déduit de la question précédente que la droite d'équation $y = -x$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, et que $\mathcal{C}_f$ est située en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.

2. a) Montrer que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Pour $x > 1$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} \left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

On a donc : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, et par suite : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 + \dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b) Conséquence ?

On déduit de la question précédente que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et qu'elle est en-dessous de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 3

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)^n$.

1. Démontrer que : $\forall k\in[\![0;n]\!],\ f_n^{(k)}(0)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}p^k$.

La formule du binôme de Newton donne :

$$f_n(x)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^{n-p}\left(\mathrm{e}^x\right)^p=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^{n-p}\mathrm{e}^{px}.$$

f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc dérivable à tout ordre au voisinage de 0, et $\forall x\in\mathbb{R},\forall k\in\mathbb{N}$,

$$f_n^{(k)}(x)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}p^k\mathrm{e}^{px}$$, et en particulier : $\forall k\in[\![0;n]\!],\ f_n^{(k)}(0)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}p^k$.

2. Rappeler le théorème de Taylor-Young. En déduire l'existence et la forme du développement limité de f_n à l'ordre n en 0.

Soit un entier naturel n. Si $f\in D^n(I;\mathbb{R})$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a\in I$, alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a qui est :

$$f(x)\underset{x\to a}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

f_n étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_n admet un développement limité à tout ordre en 0.

Le développement limité à l'ordre n en 0 est : $f_n(x)\underset{x\to 0}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}x^k+\mathrm{o}\left(x^n\right)$

3. Indépendamment de ce qui précède, en utilisant un équivalent de e^x-1 lorsque x tend vers 0, justifier que : $f_n(x)\underset{x\to 0}{=}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)$.

On sait que $\mathrm{e}^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x$ donc $f_n(x)\underset{x\to 0}{\sim}x^n$, ce qui est équivalent à : $f_n(x)\underset{x\to 0}{=}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)$.

4. En déduire la valeur de $\alpha_k=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}p^k$, pour $k\in[\![0;n]\!]$.

De l'unicité du développement limité d'ordre n en 0, par identification, on obtient :

$$\forall k\in[\![0;n-1]\!],\ \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}=0 \text{ et } \frac{f_n^{(n)}(0)}{n!}=1 .$$

On déduit de la question **1** que :

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}p^k=f_n^{(k)}(0)=\begin{cases}0 & \text{si } k\in[\![0;n-1]\!]\\ n! & \text{si } k=n\end{cases}$$, d'où (en remarquant que $(-1)^{-p}=(-1)^p$) :

$$\alpha_k=(-1)^{-n}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}p^k=\begin{cases}0 & \text{si } k\in[\![0;n-1]\!]\\ (-1)^n n! & \text{si } k=n\end{cases}$$

EXERCICE 4

Soit *f* définie sur $[-1;1]$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos(x)$, et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

f est continue et strictement décroissante sur [-1 ; 1], donc sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$; on en déduit que :

$f\left(\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right);f(0)\right]=\left[\frac{1}{2}\mathrm{Arccos}\left(\frac{\pi}{4}\right);\frac{\pi}{4}\right]\subset\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, donc $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ est stable par *f*.

Par suite, comme $u_0\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, pour tout *n* de $\mathbb{N}$, on a $u_n\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ (par une récurrence immédiate).

2. On admet que $\pi^2<12$. Montrer que *f* est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, et qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right], |f'(x)|\leq k<1.$$

f est dérivable sur]-1 ; 1[donc sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right], f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$. Ainsi, $|f'|$ est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ donc $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right], |f'(x)|\leq\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{1}{2\sqrt{1-(\pi/4)^2}}=\frac{2}{\sqrt{16-\pi^2}}$. En posant $k=\frac{2}{\sqrt{16-\pi^2}}$ et en tenant compte de $\pi^2<12$ on a bien l'existence d'un réel *k* tel que : $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right], |f'(x)|\leq k<1$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel $a\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ tel que *f*(*a*) = *a*.

Soit *g* : $x\mapsto f(x)-x$; *g* est continue et strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ (comme somme de telles fonctions), donc *g* établit une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ vers $g\left(\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[\frac{1}{2}\mathrm{Arccos}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, intervalle qui contient 0, d'où l'existence et l'unicité d'un réel *a* tel que *g*(*a*) = 0, c'est-à-dire *f*(*a*) = *a*.

4. Prouver alors que : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-a|\leq k|u_n-a|$ puis que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-a|\leq k^n|u_0-a|$.

f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$, et $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[, |f'(x)|\leq k$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall(\alpha;\beta)\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]^2, |f(\alpha)-f(\beta)|\leq k|\alpha-\beta|$.

Comme u_n et *a* sont dans $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on peut écrire : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-a|\leq k|u_n-a|$.

Enfin, une récurrence immédiate donne : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-a|\leq k^n|u_0-a|$.

5. Conclusion ?

$0\leq k<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}k^n=0$; le théorème d'encadrement donne : $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-a|=0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$.

EXERCICE 5

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. f est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Par récurrence, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(0)}(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{0+1}}$$ la propriété est initialisée, en posant $P_0=1$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$ (H.R.) , alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x)\underset{H.R.}{=}\frac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1}-2x(n+1)(1+x^2)^n P_n(x)}{(1+x^2)^{2n+2}}=\frac{P_n'(x)(1+x^2)-2x(n+1)P_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$$

Comme $x\mapsto P_n(x)$ est une fonction polynomiale, $P_{n+1}:x\mapsto P_n'(x)(1+x^2)-2x(n+1)P_n(x)$ l'est également, et l'on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x)=\dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier n, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

2. En remarquant que $\forall x\in\mathbb{R},(1+x^2)f(x)=1$, montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},(1+x^2)f'(x)+2xf(x)=0$.

On sait que $\forall x\in\mathbb{R},(1+x^2)f(x)=1$; en dérivant, on obtient : $\forall x\in\mathbb{R},(1+x^2)f'(x)+2xf(x)=0$.

3. Enoncer la formule de Leibniz, en précisant bien les conditions d'application.

Si f et g sont deux fonctions de $D^n(I;\mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, alors

$fg\in D^n(I;\mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$.

4. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R},P_{n+1}(x)+2(n+1)xP_n(x)+n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x)=0$.

$x\mapsto 1+x^2$ et $x\mapsto 2x$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en dérivant à l'ordre $n\in\mathbb{N}^*$ l'identité obtenue à la question précédente, et en appliquant la formule de Leibniz on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R},(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)+2xf^{(n)}(x)+2nf^{(n-1)}(x)=0$$

d'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R},(1+x^2)^{n+1}f^{(n+1)}(x)+2(n+1)x(1+x^2)^n f^{(n)}(x)+n(n+1)(1+x^2)^n f^{(n-1)}(x)=0$.

On a donc bien : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R},P_{n+1}(x)+2(n+1)xP_n(x)+n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x)=0$.