EXERCICE 1

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = e - nI_{n-1}$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \leq I_{n-1}$$

3. En déduire que :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$$

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 t^n e^t dt,$$

et retrouver avec cette forme le résultat de la question **1**.

EXERCICE 2

Soit la fonction *f* définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Indication : utiliser des développements limités…

T.S.V.P.

PROBLEME

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note I_3 la matrice identité, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On appelle E le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I_3, J, J^2, c'est-à-dire :

$$E = \{M\,(a; b; c) = a\,I_3 + b\,J + c\,J^2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;/\; (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\}$$

1. a) Calculer J^k pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $\mathcal{B} = (I_3\,;\, J\,;\, J^2)$ est une base de E.

2. On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ M\,(a; b; c) & \mapsto & (a+b;\, a-c) \end{array}$$

On note $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) Vérifier que f est une application linéaire.

b) Déterminer le noyau de f, en donner sa dimension et une base.

c) f est-elle surjective ?

d) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

e) On pose $\mathcal{C} = (I_3;\, I_3 - J;\, I_3 - J + J^2)$ et $\mathcal{C}' = ((1;1)\,;\,(0;1))$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E et que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

f) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.