Math Sup **CC06** **CORRECTION**

EXERCICE 1

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = e - n\, I_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient u et v définies sur [1 ; e] par $u(x) = (\ln(x))^n$ et $v(x) = x$.

u et v sont de classe C^1 sur [1 ; e] et $\forall x \in [1;e] : u'(x) = n(\ln x)^{n-1} \times \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$

Le théorème d'intégration par parties donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = \left[x(\ln x)^n\right]_1^e - \int_1^e n(\ln x)^{n-1} dx = e - nI_{n-1}.$$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \le I_n \le \frac{e}{n+1} \le I_{n-1}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [1;e], \ 0 \le (\ln x)^n$; donc (par positivité de l'intégrale) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \ge 0$.

D'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e - nI_{n-1} = I_n \ge 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n-1} \le \frac{e}{n}$,

ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \le \frac{e}{n+1}$.

D'après la question précédente, cette inégalité donne :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e - nI_{n-1} \le \frac{e}{n+1}$ d'où $nI_{n-1} \ge e - \frac{e}{n+1}$ soit encore: $I_{n-1} \ge \frac{e}{n+1}$.

Finalement, on a: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \le I_n \le \frac{e}{n+1} \le I_{n-1}$.

3. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$

D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{e}{n+2} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$, d'où $\frac{n}{n+2} \le I_n \times \frac{n}{e} \le \frac{n}{n+1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; le théorème d'encadrement donne : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \times \frac{n}{e} = 1$ d'où : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$, et retrouver avec cette forme le résultat de la question **1**.

On considère le changement de variable $t = \ln(x)$.

ln étant de classe C^∞ et bijectif sur [1 ; e] avec $x = e^t$ et $dx = e^t dt$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = \int_0^1 t^n e^t dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient u et v définies sur [0 ; 1] par $u(t) = t^n$ et $v(t) = e^t$.

u et v sont de classe C^1 sur [0 ; 1] et $\forall t \in [0;1] : u'(x) = nt^{n-1}$ et $v'(t) = e^t$.

Le théorème d'intégration par parties donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^1 t^n e^t dt = \left[t^n e^t\right]_0^1 - \int_1^e nt^{n-1} e^t dt = e - nI_{n-1}.$$

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{\sin x} & \text{si } x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Indication : utiliser des développements limités…

Par somme et quotient de fonctions de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, f est de classe C^{∞} sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ (où les dénominateurs ne s'annulent pas !).

Au voisinage de 0 :

$$\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+o_0\left(x^3\right)}{x-\frac{x^3}{6}+o_0\left(x^4\right)}=\frac{1}{x}\left(\frac{1-\frac{x^2}{2}+o_0\left(x^3\right)}{1-\frac{x^2}{6}+o_0\left(x^3\right)}\right)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{2}+o_0\left(x^3\right)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o_0\left(x^3\right)\right)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{3}+o_0\left(x^3\right)\right)$$

On a donc : $f(x)=\frac{1}{3}x+o_0\left(x^2\right)$.

On en déduit que la fonction f est continue en 0, et qu'elle admet une dérivée en 0 qui vaut $f'(0)=\frac{1}{3}$.

De plus, $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sin^2 x}$.

Au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{\left(x+\frac{x^3}{6}+o_0\left(x^3\right)\right)^2}=\frac{1}{x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o_0\left(x^2\right)\right)^2}=\frac{1}{x^2}\left(1+2\frac{x^2}{6}+o_0\left(x^2\right)\right)$$

On a donc : $f'(x)=\frac{1}{3}+o_0(1)$.

On en déduit que f' est continue en 0.

Finalement, f est de classe C^1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

PROBLEME

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note I_3 la matrice identité, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On appelle E le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I_3, J, J^2, c'est-à-dire :

$$\mathrm{E} = \{M\,(\mathrm{a};\, \mathrm{b};\, \mathrm{c}) = \mathrm{a}\, I_3 + \mathrm{b}\, J + \mathrm{c}\, J^2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;/\; (\mathrm{a};\, \mathrm{b};\, \mathrm{c}) \in \mathbb{R}^3\}$$

1. a) Calculer J^k pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $J^3 = 0$ donc, $\forall k \geq 3, J^k = 0$ (récurrence immédiate).

b) Montrer que $\mathcal{B} = (I_3\,;\, J\,;\, J^2)$ est une base de E.

soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$; $aI_3 + bJ + cJ^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

La famille $\{I_3\,;\, J\,;\, J^2\}$ est donc une famille libre ; par définition de E, elle est génératrice, c'est donc une base de E.

2. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \to & \mathbb{R}^2 \\ M\,(\mathrm{a};\, \mathrm{b};\, \mathrm{c}) & \mapsto & (\mathrm{a}+\mathrm{b};\, \mathrm{a}-\mathrm{c}) \end{array}$.

On note $\mathcal{B}$' la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) Vérifier que f est une application linéaire.

Soit $(\lambda; A; B) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}^2$. On note $A = a_1 I_3 + a_2 J + a_3 J^2$ et $B = b_1 I_3 + b_2 J + b_3 J^2$; on a :

$f(\lambda A + B) = (\lambda a_1 + b_1 + \lambda a_2 + b_2; \lambda a_1 + b_1 - \lambda a_3 - b_2) = \lambda f(A) + f(B)$; f est donc linéaire.

b) Déterminer le noyau de f, en donner sa dimension et une base.

$A = a_1 I_3 + a_2 J + a_3 J^2 \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = a(I_3 - J + J^2)$.

On en déduit que Ker(f) = Vect$\{I_3 - J + J^2\}$ qui est de dimension 1.

c) f est-elle surjective ?

Le théorème du rang donne : rg(f) = dim(E) – dim(Ker(f)) = 3 – 1 = 2 = dim($\mathbb{R}^2$).

On en déduit que f est surjective.

d) Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

$f(I_3) = (1\,;\,1)$; $f(J) = (1\,;\,0)$ et $f(J^2) = (0\,;\,-1)$ donc : $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

e) On pose $\mathcal{C} = (I_3;\, I_3 - J;\, I_3 - J + J^2)$ et $\mathcal{C}' = ((1;1)\,;\,(0;1))$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E et que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$; $aI_3 + b(I_3 - J) + c(I_3 - J + J^2) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow (a+b+c)I_3 + (-b-c)J + cJ^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Comme $(I_3\,;\,J\,;\,J^2)$ est une base de E, on en déduit que : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$.

La famille $\mathcal{C}$ est donc une famille libre de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3 ; c'est une base de E.

$\mathcal{C}'$ est une famille libre (les deux vecteurs n'étant clairement pas colinéaires) de cardinal 2 dans $\mathbb{R}^2$, c'en est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

f) Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

$f(I_3) = (1\,;\,1)$; $f(I_3 - J) = (0\,;\,1)$ et $f(I_3 - J + J^2) = (0\,;\,0)$ d'où : $\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : On peut aussi procéder ainsi :

On a : $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; on calcule :

$P_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; on obtient : $\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = P_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}^{-1} A P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

… mais c'est plus long !