EXERCICE 1

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1. a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{-x}\right)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)=1$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{-e^{x}}{1+e^{-x}}<0$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

X	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

2. Pour tout réel x, on note : $g(x) = f(x) + x$.

a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

$\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=\ln\left(e^{-x}\left(e^{x}+1\right)\right)+x=-x+\ln\left(e^{x}+1\right)+x=\ln\left(e^{x}+1\right)$; d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

On dit que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote en $-\infty$ la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x$.

b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$; en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)>0$, donc $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)>-x$; on en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ se situe au-dessus de la droite $\mathscr{D}$.

3. Soit a un nombre réel non nul. On note M et N les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et $-a$.

a) Vérifier que : $f(a) - f(-a) = -a$.

$$f(a)-f(-a)=\ln\left(1+e^{-a}\right)-\ln\left(1+e^{a}\right)=\ln\left(\frac{1+e^{-a}}{1+e^{a}}\right)=\ln\left(\frac{e^{-a}\left(1+e^{a}\right)}{1+e^{a}}\right)=\ln\left(e^{-a}\right)=-a$$

En déduire que la droite (MN) garde une direction (« pente ») constante , à préciser.

La fonction f étant strictement décroissante, le réel a étant non nul, les points M et N sont distincts.

Le coefficient directeur de la droite (MN) est donné par : $\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)}=\dfrac{-a}{2a}=-\dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que l'on a : $f'(a) + f'(-a) = -1$.

$$f'(a)+f'(-a)=\frac{-e^{-a}}{1+e^{-a}}+\frac{-e^{a}}{1+e^{a}}=\frac{-e^{-a}\left(1+e^{a}\right)-e^{a}\left(1+e^{-a}\right)}{\left(1+e^{-a}\right)\left(1+e^{a}\right)}=\frac{-e^{-a}-1-e^{a}-1}{1+e^{a}+e^{-a}+1}=-1$$

En déduire que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.

Equation de la tangente en M : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$;

Equation de la tangente en N : $y = f'(-a)(x + a) + f(-a)$

Les tangentes s'interceptent au point d'abscisse x tel que : $f'(a)(x - a) + f(a) = f'(-a)(x + a) + f(-a)$

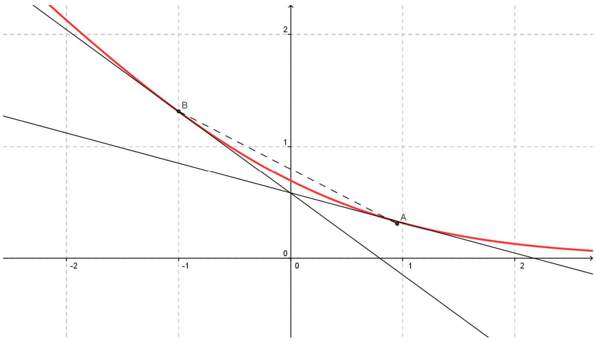
$\Leftrightarrow \left(f'(a) - f'(-a)\right)x = a\left(f'(a) + f'(-a)\right) + f(-a) - f(a) = a \times (-1) - (-a) = 0$

On a montré que f' est strictement négative, comme a n'est pas nul on ne peut donc pas avoir $f'(a) - f'(-a) = 0$.

On en déduit que les tangentes s'interceptent au point d'abscisse 0, à savoir sur l'axe des ordonnées.

Esquisser $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ (unité 4 cm), et illustrer les résultats précédents sur $\mathscr{C}$ pour $a = 1$.

On donne : $f(1) \simeq 0{,}3$, et $\ln(2) \simeq 0{,}7$.



EXERCICE 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pour tout réel positif x, on note $\sqrt[n]{x}$ le réel positif a tel que $a^n = x$.
On donne n réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ et on pose :

$$u = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad v = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

Les nombres u, v, et w sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln x$ et $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, n \times \ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \ln\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right) = \ln(x)$, d'où : $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln(x)$;

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^n = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n} = \frac{1}{x}$, donc par définition de la « racine n-ième » : $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x}}$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$.

La fonction u définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = x - 1 - \ln(x)$ est dérivable sur son domaine comme somme de fonctions dérivables et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

La fonction u est donc strictement décroissante sur]0 ; 1] et strictement croissante sur $[1;+\infty[$;

elle admet un minimum pour $x = 1$, qui vaut 0. On en déduit que u est une fonction positive, et par suite, que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - 1 \geq \ln x$.

3. Montrer que : $v \le u$; on note (*) cette inégalité.

$\forall k \in [\![1;n]\!], \ln\left(\frac{a_k}{u}\right) \le \frac{a_k}{u} - 1$, d'où en sommant les inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a_k}{u}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{u} - n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(a_k) - \ln u\right) \le \frac{1}{u}\sum_{k=1}^{n} a_k - n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) - n\ln u \le \frac{1}{u} \times nu$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) - n\ln u \le 0 \Leftrightarrow \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \le n\ln u \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \le \ln u \Leftrightarrow \ln v \le \ln u$$

Ainsi, par croissance de la fonction exponentielle : $v \le u$.

4. En utilisant l'inégalité (*), montrer que : $w \le v$.

L'inégalité (*) est vraie pour toute famille de réels strictement positifs. En l'appliquant pour la famille $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}$, on obtient : $0 < \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k^{-1}} \le \frac{1}{w}$, d'où : $w \le \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k^{-1}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k^{-1}}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = v$

5. En appliquant l'inégalité (*), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \le \frac{n+1}{2}.$$

On prend : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ a_k = k$. L'inégalité (*) donne : $\sqrt[n]{n!} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.

EXERCICE 3

1. Enoncer la formule du binôme de Newton. $\forall (a;b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ (avec a = 2 et b = 1)

b) $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x(1-x)\right)^k = \left(x - x^2 + 1\right)^n$ (avec $a = x - x^2$ et b = 1)

c) $U = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Si $n = 0$: $U = 0$; sinon le terme pour $k = 0$ étant nul on a :

$$U = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n \times (n-1)!}{i!(n-1-i)!} = n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n \times 2^{n-1}$$ (avec $a = b = 1$)

d) $V = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \underset{a=b=1}{=} \sum_{k=0}^{n} 2^k \underset{\substack{\text{somme} \\ \text{géométrique}}}{=} 2^{n+1} - 1$

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les trois sommes u_n, v_n, et S_n par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k}$$

1. En calculant de deux façons différentes $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right)$

(somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n}k^3 = (n+1)^3$ et développement

$\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(3k^2+3k+1\right) = 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + 3\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1 = 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$),

montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

$$3\sum_{k=0}^{n}k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^3 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Déterminer les réels a, b et c vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} = u_{2n+1} - \frac{1}{2}u_n - 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}}_{\substack{\text{indices pairs}\\ \text{(de 2 à } 2n)}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}}_{\substack{\text{indices impairs}\\ \text{(de 1 à } 2n+1)}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \underbrace{1}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}$$

D'où le résultat.

4. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n à l'aide des termes de la suite (u_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{v_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}\right) = 6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$S_n = 6\left(u_n + u_{n+1} - 1 - 4\left(u_{2n+1} - \frac{1}{2}u_n - 1\right)\right) = 18u_n + 6u_{n+1} - 24u_{2n+1} + 18$$