EXERCICE 1

1. Après avoir donné la signification (f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$), donner la négation de l'assertion suivante:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x<y)\Rightarrow\left(f(x)>f(y)\right),$$

$$\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x<y)\wedge\left(f(x)\leq f(y)\right)$$

où f désigne une fonction réelle.

2. On considère l'assertion A : « noir et blanc donnent du gris », formalisée par :

$$\mathrm{N}\wedge\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{G}$$

On notera $\overline{\mathrm{P}}$ la négation d'une assertion P.

a) Donner la contraposée (formelle) de l'assertion A. $\overline{\mathrm{G}}\Rightarrow\overline{\mathrm{N}}\vee\overline{\mathrm{B}}$

b) Donner la négation (formelle) de A. $\mathrm{N}\wedge\mathrm{B}\wedge\overline{\mathrm{G}}$

3. Montrer l'assertion suivante : $\left(x^2>x\right)\Rightarrow\left((x<0)\vee(x>1)\right)$

$(0\leq x\leq 1)\Rightarrow\left(x^2\leq x\right)$ (en multipliant les membres des inégalités par $x\geq 0$).
Le résultat attendu est la contraposée.

4. f désigne une fonction réelle croissante sur $\mathbb{R}$. La suite (U_n) est définie par son premier terme U_0 et $\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=f(U_n)$. On suppose que $U_0>U_1$.

Montrer par récurrence alors la suite (U_n) est décroissante.

$\forall n\in\mathbb{N}$, on note P_n l'assertion : « $U_n\geq U_{n+1}$ ».
On a : $U_0>U_1$; donc P_0 est vérifiée.
Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose P_n, c'est-à-dire $U_n\geq U_{n+1}$.
La fonction f étant croissante, on en déduit que $f(U_n)\geq f(U_{n+1})$, soit encore : $U_{n+1}\geq U_{n+2}$; l'assertion P_{n+1} est donc vérifiée.
Par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$ l'assertion P_n est donc vraie.

EXERCICE 2

Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

D'où : $x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\mathrm{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;2k\pi\right\}}$$

2. $\cos(2x)-\sin(2x)=0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)=0\Leftrightarrow\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

D'où : $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\mathrm{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right\}}$$

3. $\cos x+\sqrt{3}\sin x+\sqrt{2}\cos(2x)-\sqrt{2}\sin(2x)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x+\sqrt{2}\cos(2x)-\sqrt{2}\sin(2x)\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)\right)=0$

D'où : $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ou $\frac{1}{2}\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$\boxed{S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{13\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3};\frac{5\pi}{12}+2k\pi\right\}}$

4. $\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Le domaine de définition est $D=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\pi\right\}$

$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\Leftrightarrow x\in D,\ \sin(2x)\sin(x)=\cos(2x)\cos(x)$

$\Leftrightarrow x\in D,\ \cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)=0\Leftrightarrow x\in D,\ \cos(3x)=0$

D'où : $x\in D,\ 3x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ soit encore $x\in D,\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Si $k = 3n$, $x=\frac{\pi}{6}+n\pi\in D$; si $k = 3n + 1$, $x=\frac{\pi}{2}+n\pi\in D$; si $k = 3n + 2$, $x=\frac{5\pi}{6}+n\pi\in D$

Finalement, $\boxed{S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right\}}$.

EXERCICE 3

1. Donner les solutions complexes de l'équation $Z^4 = 1$.

Les solutions de $Z^4 = 1$ sont les racines quatrièmes de l'unité, à savoir : $e^{i\frac{k\pi}{2}}$, $k\in[\![0;3]\!]$, c'est-à-dire $1, -1, i, -i$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\left(z^2+1\right)^4=(z-3)^4$ (E)

3 n'est pas solution de (E), on a donc : $\left(z^2+1\right)^4=(z-3)^4\Leftrightarrow\left(\frac{z^2+1}{z-3}\right)^4=1$.

z est donc solution de (E) si, et seulement si :

$\frac{z^2+1}{z-3}=1$ ou $\frac{z^2+1}{z-3}=-1$ ou $\frac{z^2+1}{z-3}=i$ ou $\frac{z^2+1}{z-3}=-i$

$\Leftrightarrow z^2-z+4=0$ ou $z^2+z-2=0$ ou $z^2-iz+1+3i=0$ ou $z^2+iz+1-3i=0$

Les deux premières équations sont à coefficients réels. On trouve :

$z^2-z+4=0\Leftrightarrow z\in\left\{\frac{1+i\sqrt{15}}{2};\frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right\}$; $z^2+z-2=0\Leftrightarrow z\in\{1;-2\}$;

Pour la troisième équation, le discriminant est – 5 – 12i donc une racine carrée est 2 – 3i ;
On trouve : $z^2 - i\,z + 1 + 3i = 0 \Leftrightarrow z \in \{1-i;-1+2i\}$.

Pour la quatrième équation, le discriminant est – 5 + 12i dont une racine carrée est 2 + 3i ;
$z^2 + i\,z + 1 - 3i = 0 \Leftrightarrow z \in \{1+i;-1-2i\}$.

On aurait pu remarquer que z est solution de $z^2 - i\,z + 1 + 3i$ si, et seulement si $\bar{z}$ est solution de $z^2 + i\,z + 1 - 3i = 0$; les solutions de la troisième et de la quatrième équation sont donc conjuguées !

L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\boxed{\left\{\frac{1+i\sqrt{15}}{2};\frac{1-i\sqrt{15}}{2};1;-2;1-i;-1+2i;1+i;-1-2i\right\}}$.

EXERCICE 4

Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x} = \frac{1}{2}$ (1)

1. On pose $f : x \mapsto \sqrt{x}\ln x + \ln 2$.

a) Donner le domaine de définition de f , et préciser ses limites aux bornes de ce domaine.

Le domaine de f est $\mathbb{R}_+^*$; $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ (opérations sur les limites) et

$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x \underset{X=\sqrt{x}}{=} \lim_{X\to0^+} X\ln\left(X^2\right) = \lim_{X\to0^+} 2X\ln(X) = 0$ (croissances comparées) d'où $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = \ln 2}$.

b) Etudier les variations de f, et dresser son tableau de variations complet.

f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit de fonctions dérivables), et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$. Le tableau de variations en découle :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $\ln(2)$	$\searrow$	$\ln 2 - \frac{2}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Déterminer, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On donne $\ln 2 \simeq 0{,}69$ et $\frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0{,}36$.

D'après les questions précédentes, en appliquant le théorème de bijection, f est une bijection de $\left]0;\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right]$ vers $\left[\ln 2 - \frac{2}{\mathrm{e}};\ln 2\right[$, ainsi que de $\left[\frac{1}{\mathrm{e}^2};+\infty\right[$ vers $\left[\ln 2 - \frac{2}{\mathrm{e}};+\infty\right[$.

De plus, avec $\ln 2 \simeq 0{,}69$ et $\frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0{,}36$, on obtient $\ln 2 - \frac{2}{\mathrm{e}} \simeq -0{,}03 < 0$; ce qui prouve l'existence d'une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ dans chacun des deux intervalles où f est bijective.
Il y a donc $\boxed{\text{deux solutions}}$.

2. On va déterminer les solutions de l'équation $f(x)=0$ sous la forme $x=\dfrac{1}{n^2}$, avec $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=0\Leftrightarrow n^2=2^n$.

On a : $f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln 2=-\dfrac{2\ln n}{n}+\ln 2$; dès lors,

$f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=0\Leftrightarrow -2\ln n+n\ln 2=0\Leftrightarrow 2\ln n=n\ln 2\Leftrightarrow \ln\left(n^2\right)=\ln\left(2^n\right)\Leftrightarrow n^2=2^n$.

b) En déduire, par l'absurde, que n est pair puis, en posant $n = 2p$, $p\in\mathbb{N}^*$, que $2^{p-1}=p$.

Supposons n impair. Alors $n = 2p + 1$ (avec $p\in\mathbb{N}$) et $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ qui est donc impair ; ceci contredit le fait que $n^2=2^n$ $\left(\text{avec } n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Par suite, $\exists p\in\mathbb{N}^*, n=2p$ et $n^2=2^n\Leftrightarrow(2p)^2=2^{2p}\Leftrightarrow(2p)^2=\left(2^p\right)^2\underset{p>0}{\Leftrightarrow}2p=2^p\Leftrightarrow p=2^{p-1}$.

c) Trouver deux solutions évidentes à cette dernière équation, et en déduire les solutions de l'équation $f(x)=0$.

1 et 2 sont deux solutions évidentes de $2^{p-1}=p$; on en déduit que $\left(\dfrac{1}{2\times 1}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ et $\left(\dfrac{1}{2\times 2}\right)^2=\dfrac{1}{16}$ sont deux solutions de l'équation $f(x)=0$. D'après la question **1.c)** ce sont les seules.

3. Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation (1).

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$; $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln x+\ln 2=0\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln x=\ln\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln x}=\dfrac{1}{2}$.

Les solutions de l'équation (1) sont exactement celles de $f(x)=0$, c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{1}{4}\text{ et }\dfrac{1}{16}}$.

EXERCICE 5

1. Démontrer, à l'aide d'une étude de fonction, que : $\forall a\in[0;1],\ a(1-a)^2\le\dfrac{4}{27}$

Posons $f: x\mapsto x(1-x)^2=x^3-2x^2+x$. f est dérivable sur [0 ; 1] et $\forall x\in[0;1],\ f'(x)=3x^2-4x+1$.

Les racines de $f'(x)$ sont $\dfrac{1}{3}$ et 1 ; on en déduit que f est strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$, et que f atteint comme maximum sur [0 ; 1] la valeur $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$.

On a donc montré que $\forall a\in[0;1],\ a(1-a)^2\le\dfrac{4}{27}$.

2. Soit a un réel de [0 ; 1]. On pose $f_a: x\mapsto -ax^2+a(1-a)x$.

a) Déterminer le maximum de f_a sur $[0 ; 1 – a]$.

Si $a\neq 0$: f_a est dérivable sur $[0 ; 1 – a]$ et $\forall x\in[0;1-a],\ f_a'(x)=-2ax+a(1-a)$.

$f_a'(x)$ s'annule en $\dfrac{1-a}{2}$; f_a est strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{1-a}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1-a}{2};1-a\right]$, f_a atteint donc comme maximum sur $[0 ; 1 – a]$ la valeur $f\left(\dfrac{1-a}{2}\right)=\dfrac{a(1-a)^2}{4}$.

Si $a = 0$, f_a est la fonction nulle sur [0 ; 1]. Son maximum est 0.

b) En déduire la propriété suivante : si a, b, c sont trois réels positifs tels que $a + b + c = 1$ alors $abc \leq \frac{1}{27}$.

De $a + b + c = 1$, on déduit que $b = 1 - a - c$ donc que b varie entre 0 et $1 - a$.

De plus, $c = 1 - a - b$ donne $abc = ab\,(1 - a - b) = ab - a^2b - ab^2 = -ab^2 + a\,(1 - a)\,b$.

D'après la question précédente, $-ab^2 + a(1 - a)\,b \leq \frac{a(1-a)^2}{4}$ (avec égalité lorsque $b = \frac{1-a}{2}$), et la question **1.** assure que pour $a \in [0;1]$, $\frac{a(1-a)^2}{4} \leq \frac{1}{27}$.

On a donc bien montré que si a, b, c sont trois réels positifs tels que $a + b + c = 1$ alors $abc \leq \frac{1}{27}$.

c) Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

On a l'égalité si, et seulement si $abc = \frac{a(1-a)^2}{4} = \frac{1}{27}$ c'est-à-dire pour $a = \frac{1}{3}$ (d'après la question **1.**) et $b = \frac{1-a}{2}$ (d'après la question **2.a)**). Comme $a + b + c = 1$, on a donc l'égalité si, et seulement si $\boxed{a = b = c = \frac{1}{3}}$.

3. En utilisant l'inégalité précédente, montrer que, pour tous réels positifs x, y, z on a : $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.

Si $x = y = z = 0$, l'inégalité est immédiate.

Sinon, les trois réels étant positifs, $x + y + z \neq 0$ et, en posant $a = \frac{x}{x+y+z}$, $b = \frac{y}{x+y+z}$ et $c = \frac{z}{x+y+z}$, on a trois réels positifs a, b et c tels que $a + b + c = 1$.

Le résultat de la question **2.b)** donne $abc = \frac{xyz}{(x+y+z)^3} \leq \frac{1}{27}$ d'où : $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.

4. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si $x = y = z$.

L'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si $a = b = c$, ce qui revient à $x = y = z$.