EXERCICE 1

On considère les applications *f* et *g* définies par $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 2z+i \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 3+\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}z \end{array}$

On dit que $z \in \mathbb{C}$ est **invariant** par f si, et seulement si, $f(z) = z$.

1. Déterminer les points invariants par *f* (z_0 = - i) ;

puis déterminer si *f* définit une rotation / une homothétie : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = 2(z+i)-i$,

donc f est une homothétie ;

et donner le centre (le point d'affixe z_0), l'angle / le rapport de f le cas échéant (rapport 2).

2. Déterminer les points invariants par *g* $\left(z_0 = \dfrac{6-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i}{4-2\sqrt{2}} \right)$;

puis déterminer si *g* définit une rotation / une homothétie $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-z_0)+z_0$,
donc *f* est une rotation ;

et donner le centre (le point d'affixe z_0), et l'angle / le rapport de *g* le cas échéant (angle $-\dfrac{\pi}{4}$) .

EXERCICE 2

On considère l'application *f* définie par $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2+2iz-2i \end{array}$

1. Soit $w \in \mathbb{C}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ où l'inconnue est z.

$\left(f(z) = w \right) \Leftrightarrow \left(z^2+2iz-2i-w = 0 \right)$, soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4(w-1+2i)$.

Ainsi, si $w = 1 - 2i$, il y a une seule solution, sinon il y en a deux distinctes.

L'application est-elle injective ? Non, car si $w \neq 1-2i$, *w* a deux antécédents distincts par *f* ;

surjective ? Oui, car tout nombre complexe *w* admet au moins un antécédent par *f* ;

bijective ? Non, car elle n'est pas injective.

2. Trouver les nombres complexes z tels que $z^2+(2i-1)z-2i = 0$

Le discriminant est $\Delta = -3+4i$ dont une racine carrée est $\delta = 1+2i$.

L'ensemble des solutions est donc S = $\{1 ; -2i\}$.

Remarque : $z = 1$ peut apparaître comme solution « évidente » ;

la factorisation $z^2 + (2i - 1)\,z - 2i = (z - 1)\,(z + 2i)$ donnant l'autre solution.

3. En déduire l'ensemble $\mathscr{A} = \{ z \in \mathbb{C}, f(z) = z \}$ des points invariants par *f*.

$\left(z \in \mathscr{A} \right) \Leftrightarrow \left(z^2+(2i-1)z-2i = 0 \right) \Leftrightarrow \left(z \in \{1;-2i\} \right)$

4. Soit g l'application définie par $g : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto iz - i + 1 \end{array}$

Montrer que g est bijective et déterminer la bijection réciproque g^{-1}.

$(g(z) = z') \Leftrightarrow (z = -iz' + 1 + i)$. Tout nombre complexe z' admet donc un unique antécédent par g ;
On en déduit que g est une application bijective, et $\forall z \in \mathbb{C}, g^{-1}(z) = -iz + 1 + i$.

5. Déterminer l'ensemble $g^{-1}(\mathscr{A})$. $g^{-1}(1) = 1$, et $g^{-1}(-2i) = -1 + i$, donc $g^{-1}(\mathscr{A}) = \{1; -1+i\}$.

6. Donner une interprétation géométrique de l'application g.

$\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1) + 1$, donc g est la rotation de centre le point d'affixe 1, et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 3

Montrer que pour tout $x \in \left]0;1\right]$, $2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + \operatorname{Arcsin}(2x-1) = \dfrac{\pi}{2}$

On constate tout d'abord que le domaine de définition est bien]0 ; 1], car il faut :
$x \neq 0,\ \dfrac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]0;1\right]$, et $-1 \leq 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

Méthode 1 (analytique) :

On considère la fonction définie sur]0 ; 1] par : $f(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + \operatorname{Arcsin}(2x-1)$

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction racine carrée est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$, et la fonction Arcsin est dérivable sur]-1 ; 1[, f est donc dérivable sur] 0 ; 1 [, et

$$\forall x \in \left]0;1\right[,\ f'(x) = 2 \times \frac{\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}}}{1 + \left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)^2} + \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \times \dfrac{1}{x}} + \frac{2}{2\sqrt{-x^2+x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = 0$$

On en déduit que la fonction f est constante sur]0 ; 1[et, par continuité, sur]0 ; 1].

Ainsi, $\forall x \in \left]0;1\right],\ f(x) = f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Méthode 2 :

$$\forall x \in \left]0;1\right],\ \cos\left(2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) - 1 = \frac{2}{1 + \dfrac{1-x}{x}} - 1 = 2x - 1;$$

$$\forall x \in \left]0;1\right],\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(2x-1)\right) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}(2x-1)\right) = 2x - 1.$$

Ainsi, $\forall x \in \left]0;1\right],\ \cos\left(2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(2x-1)\right)$.

De plus, $\forall x \in \left]0;1\right],\ 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) \in \left[0;\pi\right[$ et $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(2x-1) \in [0;\pi]$, on en déduit que

$$\forall x \in \left]0;1\right],\ 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(2x-1).$$

<u>Méthode 3 :</u>

Pour $x\in\left]0;1\right]$, on pose $x=\cos^2 t$ avec $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

$$f\left(\cos^2 t\right)=2\mathrm{Arc}\tan\left(\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}\right)+\mathrm{Arc}\sin\left(2\cos^2 t-1\right)=2\mathrm{Arc}\tan\left(\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\right)+\mathrm{Arc}\sin\left(\cos 2t\right)$$

$$=2\mathrm{Arc}\tan\left(\left|\tan t\right|\right)+\mathrm{Arc}\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\right)$$

$t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\left|\tan t\right|=\tan t$ et $2\mathrm{Arc}\tan\left(\tan t\right)=2t$;

de plus, $\frac{\pi}{2}-2t\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\mathrm{Arc}\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\right)=\frac{\pi}{2}-2t$;

Finalement, $\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $f\left(\cos^2 t\right)=\frac{\pi}{2}$ et donc $\forall x\in\left]0;1\right]$, $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 4

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$.

a) Etudier les variations de h.

h est dérivable sur son domaine comme somme de fonctions composées de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $h'(x)=\frac{-1}{x(1+x)^2}<0$. On en déduit que la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Etudier les limites de $h(x)$ aux bornes du domaine de définition.

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1$ donc $\lim\limits_{x\to0}h(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$.

c) Dresser le tableau complet des variations de h, et en déduire le signe de $h(x)$ sur son domaine.

x	0		$+\infty$
h	$+\infty$	$\searrow$	0

On déduit de ce qui précède que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $h(x)>0$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

a) Etudier les variations de g.

g est dérivable sur son domaine comme composées et produit de fonctions dérivables sur leurs domaines et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)=h(x)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}>0$.

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Etudier les limites de $g(x)$ aux bornes du domaine de définition.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x\ln(1+x)-x\ln(x)$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln(1+x)\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right)=0$ (par croissances comparées), d'où : $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)\underset{X=\frac{1}{x}}{\underbrace{=}}\lim\limits_{X\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+X)}{X}\right)=1$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\mathrm{e}$.

c) Dresser le tableau de variations de g.

x	0	$+\infty$
g	1 $\nearrow$	e

EXERCICE 5

On considère la fonction F définie sur $[0;1[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$

a) A l'aide d'une intégration par parties,

$u(t)=t,\ u'(t)=1;\ v(t)=-\sqrt{1-t^2},\ v'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, u et v étant dérivables à dérivées continues sur $[0\ ;x]$, pour tout réel x de $[0\ ;1[$,

montrer que $\forall x\in[0;1[,\ F(x)=\left[-t\sqrt{1-t^2}\right]_0^x-\displaystyle\int_0^x-\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=-x\sqrt{1-x^2}+\int_0^x\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^x\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable, et en déduire $F(x)$.

On effectue le changement de variable $t=\sin u$ (avec $\mathrm{d}t=\cos u\,\mathrm{d}u$) :

$$\int_0^x\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{\mathrm{Arcsin}\,x}\sqrt{\cos^2 u}\ \cos u\ \mathrm{d}u\underset{\substack{u\in[0;\mathrm{Arcsin}\,x]\\ \Rightarrow\cos u\geq 0}}{\underbrace{=}}\int_0^{\mathrm{Arcsin}\,x}\cos^2 u\ \mathrm{d}u=\int_0^{\mathrm{Arcsin}\,x}\frac{1+\cos 2u}{2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\,x+\frac{1}{4}\sin(2\mathrm{Arcsin}\,x)=\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\,x+\frac{1}{4}2\sin(\mathrm{Arcsin}\,x)\cos(\mathrm{Arcsin}\,x)=\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\,x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

On a donc : $\forall x\in[0;1[:F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\,x-\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

__Remarque :__ On peut également déterminer $F(x)$ en utilisant une « astuce algébrique » :

$$\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^x-\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^x-\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(x)-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+[\mathrm{Arcsin}\,t]_0^x=\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(x)-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Cette méthode nécessite également le calcul de $\displaystyle\int_0^x\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}F(x)=\dfrac{\pi}{4}$.