EXERCICE 1

1. On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ les ensembles :
$E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3, x+3y-z=0\}$, et $F=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3, 2x-3y+z=0\}$

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et en déterminer des bases.

b) Déterminer une base du sous-espace vectoriel $E\cap F$.

2. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

a) Etablir une équation cartésienne du plan P passant par O et admettant le vecteur $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ pour vecteur normal.

b) Etablir une équation cartésienne du plan Q passant par les A(2 ; 1 ; 5), B(-1 ; 1 ; 2) et C(-3 ; 2 ; 3).

c) Déterminer l'intersection des plans P et Q.

EXERCICE 2

Soient n un entier naturel non nul, et $a_0,a_1,...,a_n$ des réels de [-1 ; 1] deux à deux distincts. On pose :

$$P=\prod_{i=0}^{n}(X-a_i)\text{, et } \forall k\in[\![0;n]\!]: L_k=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{X-a_j}{a_k-a_j}.$$

1. a) Quel est le degré de L_k ?

b) Calculer $L_k(a_i)$ pour tout $i\in[\![0;n]\!]$.

c) Montrer que la famille $(L_k)_{0\le k\le n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On considère une fonction f définie sur [-1 ; 1], et on pose :

$$L=\sum_{k=0}^{n}f(a_k)L_k$$

Montrer que L est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i\in[\![0;n]\!], L(a_i)=f(a_i)$.

3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et on prend x dans [-1 ; 1] distinct de $a_0,a_1,...,a_n$.

a) Justifier que $P(x)\neq 0$.

On considère la fonction F définie sur [-1 ; 1] par : $F(t)=f(t)-L(t)-\dfrac{f(x)-L(x)}{P(x)}P(t)$.

b) Montrer que : $\forall k\in[\![0;n+1]\!], \exists(\alpha_{k,0},\alpha_{k,1},...,\alpha_{k,n+1-k})\in[-1;1]^{n+2-k}$ tel que :
$\alpha_{k,0}<\alpha_{k,1}<...<\alpha_{k,n+1-k}$, et $\forall i\in[\![0;n+1-k]\!]$ $F^{(k)}(\alpha_{k,i})=0$

c) En déduire que $\sup_{x\in[-1;1]}|f(x)-L(x)|\le\dfrac{\sup_{x\in[-1;1]}|P(x)|}{(n+1)!}\sup_{x\in[-1;1]}|f^{(n+1)}(x)|$

T.S.V.P.

EXERCICE 3

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{1}{1 - x + x^2}$$

1. a) Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de *f*, et justifier que *f* est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}_f$.

b) Calculer le développement limité d'ordre 3, en $x = 0$, de $f(x)$.
Quelle conséquence peut-on en tirer concernant la courbe représentative de *f* ?
Un schéma clair est également attendu.

2. a) Rappeler la formule de Leibniz (hypothèses comprises).

b) En partant de l'égalité

$$\left(1 - x + x^2\right) f(x) = 1$$

prouver que, pour tout entier $n \geq 2$ et $x \in \mathscr{D}_f$:

$$\left(1 - x + x^2\right) f^{(n)}(x) + \left(a_n x + b_n\right) f^{(n-1)}(x) + c_n f^{(n-2)}(x) = 0$$

où a_n, b_n et c_n sont des entiers ne dépendant que de *n*, que l'on explicitera.

3. On pose pour tout *n* de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

a) Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_n$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+6} = u_n$$

4. Quelques applications :

a) Donner le développement limité d'ordre 12, en $x = 0$, de $f(x)$.

b) Calculer u_{2016}.

c) Montrer que, pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $\left(5^{2n} - 1\right)$ est divisible par 6 et en déduire la valeur de $u_{5^{2016}}$.