EXERCICE 1

1. On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ les ensembles :
$E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3, x+3y-z=0\}$, et $F=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3, 2x-3y+z=0\}$

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et en déterminer des bases.

E = Vect{(1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 3)} ; F = Vect{(1 ; 0 ; -2) ; (0 ; 1 ; 3)}

b) Déterminer une base du sous-espace vectoriel $E\cap F$. $E\cap F=\text{Vect}\{(0;1;3)\}$

2. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

a) Etablir une équation cartésienne du plan P passant par O et admettant le vecteur $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ pour vecteur normal. $M(x;y;z)\in P\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow 2x-3y+z=0$.

(On reconnait l'équation caractéristique de E…)

b) Etablir une équation cartésienne du plan Q passant par les A(2 ; 1 ; 5), B(-1 ; 1 ; 2) et C(-3 ; 2 ; 3).

$M(x;y;z)\in Q\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow x+3y-z=0$.

(On reconnait l'équation caractéristique de F…)

c) Déterminer l'intersection des plans P et Q. $P\cap Q:\begin{cases}x=0\\ y=t\\ z=3t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$. (On peut utiliser la question 1!)

EXERCICE 2

Soient n un entier naturel non nul, et $a_0,a_1,\dots,a_n$ des réels de [-1 ; 1] deux à deux distincts. On pose :

$$P=\prod_{i=0}^{n}(X-a_i),\text{ et } \forall k\in[\![0;n]\!]: L_k=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{X-a_j}{a_k-a_j}.$$

1. a) Quel est le degré de L_k ? L_k est le produit de n polynômes de degré 1 ; deg(L_k) = n.

b) Calculer $L_k(a_i)$ pour tout $i\in[\![0;n]\!]$. $\forall i\in[\![0;n]\!], L_k(a_i)=\delta_{i,k}=\begin{cases}0 & \text{si } i\neq k\\ 1 & \text{si } i=k\end{cases}$

c) Montrer que la famille $(L_k)_{0\le k\le n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $(\lambda_k)_{0\le k\le n}$ tel que $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k L_k=0$. Alors, $\forall i\in[\![0;n]\!], \sum_{k=0}^{n}\lambda_k L_k(a_i)=\lambda_i=0$

La famille $(L_k)_{0\le k\le n}$ est donc une famille libre de cardinal n + 1 qui est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$; c'en est donc une base.

2. On considère une fonction f définie sur [-1 ; 1], et on pose :

$$L=\sum_{k=0}^{n} f\left(a_k\right) L_k$$

Montrer que L est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0;n]\!], L(a_i)=f(a_i)$.

$\forall i \in [\![0;n]\!], L(a_i)=\sum_{k=0}^{n} f(a_i) L_k(a_i)=f(a_i)$.

Si D est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0;n]\!], D(a_i)=f(a_i)$, alors $L-D$ est un polynôme de degré au plus n, admettant $n+1$ racines (les a_i), c'est donc le polynôme nul. D'où l'unicité.

3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et on prend x dans [-1 ; 1] distinct de $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

a) Justifier que $P(x) \neq 0$.

P est un polynôme (non nul), de degré $n+1$ admettant pour racines $a_0, a_1, \ldots, a_n$ exactement ; x n'étant pas l'une d'elles, $P(x) \neq 0$.

On considère la fonction F définie sur [-1 ; 1] par : $F(t)=f(t)-L(t)-\dfrac{f(x)-L(x)}{P(x)} P(t)$.

b) Montrer que : $\forall k \in [\![0;n+1]\!], \exists\left(\alpha_{k,0}, \alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n+1-k}\right) \in[-1;1]^{n+2-k}$ tel que :
$\alpha_{k,0}<\alpha_{k,1}<\ldots<\alpha_{k,n+1-k}$, et $\forall i \in [\![0;n+1-k]\!]\ F^{(k)}\left(\alpha_{k,i}\right)=0$.

On remarque tout d'abord, que f étant de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur [-1 ; 1], L et P étant des polynômes (de classe $\mathscr{C}^{\infty}$), la fonction F est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur [-1 ; 1].

$\forall k \in [\![0;n+1]\!]$, on note H_k la propriété : "$\exists\left(\alpha_{k,0}, \alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n+1-k}\right) \in[-1;1]^{n+2-k}$, tel que :
$\alpha_{k,0}<\alpha_{k,1}<\ldots<\alpha_{k,n+1-k}$, et $\forall i \in [\![0;n+1-k]\!]\ F^{(k)}\left(\alpha_{k,i}\right)=0$"

$\forall i \in [\![0;n]\!], F(a_i)=0$ et $F(x)=0$; on a donc H_0 avec $\alpha_{k,i}$ qui sont les a_j et x.

Soit $k \in [\![0;n]\!]$, on suppose H_k vraie ;
$\forall i \in [\![0;n+1-k]\!]\ F^{(k)}\left(\alpha_{k,i}\right)=0$, on appliquant le théorème de Rolle à la fonction $F^{(k)}$ sur chacun des intervalles $\left[\alpha_{k,i}; a_{k,i+1}\right]$ avec $i \in [\![0;n-k]\!]$ (où la fonction $F^{(k)}$ est dérivable), on obtient H_{k+1}.
Ainsi, par une récurrence finie, on obtient que la propriété H_k est vraie $\forall k \in [\![0;n+1]\!]$.

c) En déduire que $\sup\limits_{x \in[-1;1]}|f(x)-L(x)| \leq \dfrac{\sup\limits_{x \in[-1;1]}|P(x)|}{(n+1)!} \sup\limits_{x \in[-1;1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$

Le résultat précédent (avec $k=n+1$) donne : $\forall x \in[-1;1], x \notin\left\{a_0, a_1, \ldots, a_n\right\}$

$\exists \alpha_{n+1,0} \in]-1;1[, F^{(n+1)}\left(\alpha_{n+1,0}\right)=0 \Leftrightarrow f^{(n+1)}\left(\alpha_{n+1,0}\right)-L^{(n+1)}\left(\alpha_{n+1,0}\right)-\dfrac{f(x)-L(x)}{P(x)} P^{(n+1)}\left(\alpha_{n+1,0}\right)=0$

L est un polynôme de degré au plus n donc $L^{(n+1)}=0$;

P est un polynôme unitaire de degré $n+1$, donc $P^{(n+1)}=(n+1)!$

On a donc : $\exists \alpha_{n+1,0}, f^{(n+1)}\left(\alpha_{n+1,0}\right)-\dfrac{f(x)-L(x)}{P(x)}(n+1)!=0 \Leftrightarrow f(x)-L(x)=\dfrac{P(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(\alpha_{n+1,0}\right)$;

Par ailleurs, $\forall i \in [\![0;n]\!], f(a_i)-L(a_i)=0$

On en déduit que $\sup\limits_{x \in[-1;1]}|f(x)-L(x)| \leq \dfrac{\sup\limits_{x \in[-1;1]}|P(x)|}{(n+1)!} \sup\limits_{x \in[-1;1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$

EXERCICE 3

On définit la fonction f par : $f(x)=\dfrac{1}{1-x+x^2}$

1. a) Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de *f*, et justifier que *f* est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}_f$.

Le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$; de plus $x \mapsto 1-x+x^2$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas, il en est de même de f.

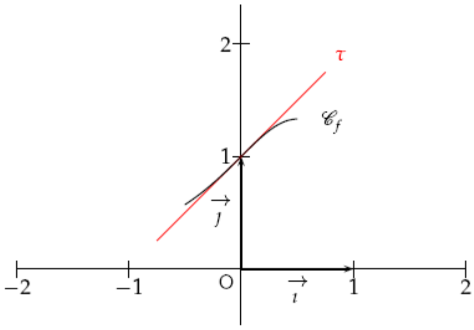
b) Calculer le développement limité d'ordre 3, en $x = 0$, de $f(x)$.

$f(x)=1+\left(x-x^2\right)+\left(x^2-2x^3\right)+x^3+o_0\left(x^3\right)$, soit : $f(x)=1+x-x^3+o_0\left(x^3\right)$

Quelle conséquence peut-on en tirer concernant la courbe représentative de *f* ?

On en déduit que la courbe de f admet au point d'abscisse 0 un tangente τ d'équation $y = 1 + x$, et qu'à droite (resp. à gauche) la courbe est en-dessous (resp. au-dessus) de la tangente.

Un schéma clair est également attendu.



2. a) Rappeler la formule de Leibniz (hypothèses comprises). (cf cours)

b) En partant de l'égalité $\left(1-x+x^2\right)f(x)=1$, prouver que, pour tout entier $n \geq 2$ et $x \in \mathscr{D}_f$:

$$\left(1-x+x^2\right)f^{(n)}(x)+\left(a_n x+b_n\right)f^{(n-1)}(x)+c_n f^{(n-2)}(x)=0$$

où a_n, b_n et c_n sont des entiers ne dépendant que de *n*, que l'on explicitera.

On note $h : x \mapsto 1-x+x^2$; h et f sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc hf également.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x)f(x)=1$ implique que $\forall n \geq 2, (hf)^{(n)}=0$ et la formule de Leibniz donne :

$\forall n \geq 2, \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^{(k)}f^{(n-k)}=0$; enfin, $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x)=2x-1,\ h''(x)=2$, et $\forall k \geq 2, h^{(k)}=0$ nous permet d'écrire que $\forall n \geq 2, \forall x \in \mathscr{D}_f$: $\left(1-x+x^2\right)f^{(n)}(x)+(2nx-n)f^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$,
et $a_n = 2n$, $b_n = -n$ et $c_n = n(n-1)$ qui sont bien des entiers.

3. On pose pour tout *n* de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

<u>*Remarque*</u> : *f* étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, d'après la formule de Taylor-Young, $\left(u_n\right)_{0\leq n\leq p}$ représente la suite des coefficients de la partie régulière du $DL_p(0)$ de f ($p \in \mathbb{N}$).

a) Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2.

En évaluant la relation déterminée dans la question précédente en 0, on obtient :
$\forall n \geq 2,\ f^{(n)}(0)-n\,f^{(n-1)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$, soit encore : $\forall n \geq 2,\ u_n-u_{n-1}+u_{n-2}=0$,
on en conclut que la suite $\left(u_n\right)$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2.
On sait de plus que $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ et $u_3 = -1$ (d'après le $DL_3(0)$ de f).

b) Montrer que $\forall n\in \mathbb{N}, u_{n+3}=-u_n$; puis que $\forall n\in \mathbb{N}, u_{n+6}=u_n$.

On a : $\forall n\in \mathbb{N}, u_{n+3}=u_{n+2}-u_{n+1}=\left(u_{n+1}-u_n\right)-u_{n+1}=-u_n$ et $\forall n\in \mathbb{N}, u_{n+6}=-u_{n+3}=-\left(-u_n\right)=u_n$

(on dit que $\left(u_n\right)$ est 6-périodique).

4. Quelques applications :

a) Donner le développement limité d'ordre 12, en $x = 0$, de $f(x)$.

D'après les questions précédentes, $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{12}u_n x^n+o_0\left(x^{12}\right)$

et $1=u_1=-u_4=u_7=-u_{10}$, puis $0=u_2=-u_5=u_8=-u_{11}$, enfin $1=u_0=-u_3=u_6=-u_9=u_{12}$.

On conclut : $f\left(x\right)=1+x-x^3-x^4+x^6+x^7-x^9-x^{10}+x^{12}+o_0\left(x^{12}\right)$.

b) Calculer u_{2016}.

Comme 2016 est divisible par 6, $u_{2016} = u_0 = 1$.

c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left(5^{2n}-1\right)$ est divisible par 6 et en déduire la valeur de $u_{5^{2016}}$.

Soit pour tout n de $\mathbb{N}$, H_n : « $\exists k\in \mathbb{N} / \left(5^{2n}-1\right)=6k$ ».

H_0 est vraie ;

Soit $n\in \mathbb{N}$, on suppose H_n vraie : $\exists k\in \mathbb{N} / \left(5^{2n}-1\right)=6k$, alors $5^{2n+2}=5^{2n}\times 25=\left(1+6k\right)\times 25$ d'où :

$5^{2n+2}-1=6\left(25k+4\right)$; H_{n+1} est donc vraie.

Par principe de récurrence, H_n est vraie pour tout de $\mathbb{N}$.

2016 est un nombre pair, donc $\exists k\in \mathbb{N} / 5^{2016}=6k+1$; par suite $u_{5^{2016}}=u_1=1$.