EXERCICE 1

On décide d'observer l'activité d'un individu sur une longue période. On note l'activité effectuée toutes les heures, et on remarque les choses suivantes :

- L'individu n'a que trois activités différentes : manger, dormir ou travailler ;
- A l'heure numérotée 0 où l'on commence l'expérience, l'individu mange ;
- S'il travaille à une certaine heure n, il mangera à l'heure suivante avec une probabilité ½ , et dormira avec une probabilité ½ ;
- S'il mange à l'heure n, il travaillera à l'heure suivante avec une probabilité ½ , et dormira avec une probabilité ½ également ;
- S'il dort à l'heure n, il travaillera à l'heure suivante avec une probabilité ¼ , mangera avec une probabilité ¼ , et continuera à dormir avec une probabilité ½.

On note A_n l'événement « l'individu travaille à l'heure n » ; B_n l'événement : « l'individu mange à l'heure n » ; C_n l'événement : « l'individu dort à l'heure n » .

On note a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. Relations de récurrence

a) Calculer les probabilités a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

b) Calculer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{C_3}\left(A_2\right)$.

c) A l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. Première méthode de calcul de probabilités : à l'aide de suites

a) On pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$; montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont des suites très particulières, et donner leurs expressions en fonction de n.

b) En déduire a_n , b_n et c_n en fonction de n.

c) Déterminer les limites des trois suites quand n tend vers $+\infty$.

3. Deuxième méthode : à l'aide des matrices

a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b) Prouver rigoureusement que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

c) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

d) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ et en déduire A^n puis les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

4. Troisième méthode : à l'aide d'applications linéaires

a) On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x;y;z) = \left(\dfrac{x+y+z}{2};\dfrac{x+2z}{4};\dfrac{x+2y}{4}\right)$.

Montrer que f est une application linéaire et déterminer son noyau et son image (on donnera une base de chaque).

b) Déterminer $F = \mathrm{Ker}\left(f - Id_{\mathbb{R}^3}\right)$ et $G = \mathrm{Ker}\left(f + \dfrac{1}{2}Id_{\mathbb{R}^3}\right)$.

T.S.V.P.

c) Montrer que tout vecteur $u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$ peut se décomposer de manière unique sous la forme $u=u_F+u_G+u_H$ avec $u_F\in F, u_G\in G$ et $u_H\in\mathrm{Ker}(f)$.

d) On note *p*, *q*, *r* les trois applications : $u\mapsto u_F$, $u\mapsto u_G$, $u\mapsto u_H$.
Montrer que $p\circ p=p$, $q\circ q=q$ et $r\circ r=r$, et déterminer ce que valent $f\circ p$, $f\circ q$ et $f\circ r$
(on doit obtenir des expressions simples avec *p*, *q* et *r*).

e) En déduire une expression de f^n à l'aide de *p*, *q* et *r*, puis donner la forme explicite de $f^n(x;y;z)$.

f) Quel est le rapport avec le reste du problème ?

EXERCICE 2

Soit *f* l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)=\dfrac{\mathrm{Arc}\tan x}{x}$

On note C_f la courbe de *f* dans un repère orthonormé du plan.

1. a) Montrer que *f* est paire, et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que *f* est dérivable en 0 ; donner *f* ’(0) ainsi que l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, et la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ au voisinage de ce point.

c) Justifier que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner *f* ’(*x*) pour tout *x* de $\mathbb{R}^*$.

d) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{d}t=\frac{-1}{2}x^2 f'(x)$

e) En déduire les variations de *f*.

2. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(0)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, \varphi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

a) Montrer que φ est paire.

b) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que : $\forall x\in\mathbb{R}^*, \varphi'(x)=\dfrac{1}{x}\left(f(x)-\varphi(x)\right)$

d) Montrer que φ est dérivable en 0 et déterminer $\varphi'(0)$.

e) Etudier les variations de φ.

f) Montrer qu'il existe une constante *C* telle que : $\forall t\geq 1,\ 0\leq f(t)\leq\dfrac{C}{t}$

En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=0$ puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

3. On considère l'équation (E) : $x^2y'+xy=\mathrm{Arc}\tan x$

a) Résoudre (E) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

b) Montrer que φ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.