EXERCICE 1

On décide d'observer l'activité d'un individu sur une longue période. On note l'activité effectuée toutes les heures, et on remarque les choses suivantes :

- L'individu n'a que trois activités différentes : manger, dormir ou travailler ;

On note : A_n l'événement « l'individu travaille à l'heure n » ; B_n l'événement : « l'individu mange à l'heure n » ; C_n l'événement : « l'individu dort à l'heure n » . On note a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

$\{A_n, B_n ; C_n\}$ forme une partition de l'univers. On a donc $\forall n\in\mathbb{N}, a_n+b_n+c_n=1$, et la formule des probabilités totales donne : $\forall E\in\mathscr{P}(\Omega), \forall n\in\mathbb{N},\ P(E)=P_{A_n}(E)\times a_n+P_{B_n}(E)\times b_n+P_{C_n}(E)\times c_n$

- A l'heure numérotée 0 où l'on commence l'expérience, l'individu mange ; $a_0=c_0=0$ et $b_0=1$.
- S'il travaille à une certaine heure n, il mangera à l'heure suivante avec une probabilité ½ , et dormira avec une probabilité ½ ; $P_{A_n}(A_{n+1})=0;\ P_{A_n}(B_{n+1})=P_{A_n}(C_{n+1})=\frac{1}{2}$
- S'il mange à l'heure n, il travaillera à l'heure suivante avec une probabilité ½ , et dormira avec une probabilité ½ également ; $P_{B_n}(B_{n+1})=0;\ P_{B_n}(A_{n+1})=P_{B_n}(C_{n+1})=\frac{1}{2}$
- S'il dort à l'heure n, il travaillera à l'heure suivante avec une probabilité ¼ , mangera avec une probabilité ¼ , et continuera à dormir avec une probabilité ½. $P_{C_n}(A_{n+1})=P_{C_n}(B_{n+1})=\frac{1}{4};\ P_{C_n}(C_{n+1})=\frac{1}{2}$

1. Relations de récurrence

a) Calculer les probabilités a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

La formule des probabilités totales permet d'obtenir avec les données de l'énoncé :

$$a_1=\frac{1}{2}b_0=\frac{1}{2}; b_1=0; c_1=\frac{1}{2}b_0=\frac{1}{2};\ a_2=\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{4}c_1=\frac{1}{8}; b_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}c_1=\frac{3}{8}; c_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}c_1=\frac{1}{2};$$

$$a_3=\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{4}c_2=\frac{5}{16}; b_3=\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{4}c_2=\frac{3}{16}; c_3=\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{2}c_2=\frac{1}{2}.$$

b) Calculer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{C_3}(A_2)=\dfrac{P_{A_2}(C_3)\times P(A_2)}{P(C_3)}=\dfrac{1}{5}$ (d'après la formule de Bayes)

c) A l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}c_n;\quad b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}c_n;\quad c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$$

2. Première méthode de calcul de probabilités : à l'aide de suites

a) On pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$; montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont des suites très particulières, et donner leurs expressions en fonction de n.

$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}c_n+\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}c_n=\frac{1}{2}\left(\underbrace{a_n+b_n+c_n}_{1}\right)=\frac{1}{2}$; d'où : $u_0=1$, et $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\frac{1}{2}$.

$\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}c_n-\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{4}c_n=\frac{1}{2}(b_n-a_n)=\frac{-1}{2}v_n$; (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de terme initial -1 donc : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=-\left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

b) En déduire a_n , b_n et c_n en fonction de n.

$a_0=0,\ \text{et}\ \forall n\in\mathbb{N}^*, a_n=\frac{1}{2}(u_n+v_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

$b_0=1,\ \text{et}\ \forall n\in\mathbb{N}^*, b_n=\frac{1}{2}(u_n-v_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

$c_0=0,\ \text{et}\ \forall n\in\mathbb{N}^*, c_n=1-u_n=\frac{1}{2}$

c) Déterminer les limites des trois suites quand n tend vers $+\infty$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} b_n=\frac{1}{4}$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n=\frac{1}{2}$.

3. Deuxième méthode : à l'aide des matrices

a) On pose $X_n=\begin{pmatrix} c_n\\ a_n\\ b_n\end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1}=AX_n$. $A=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/4 & 0 & 1/2\\ 1/4 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$

b) Prouver rigoureusement que $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=A^nX_0$.

Soit $\forall n\in\mathbb{N},\ H_n : X_n=A^nX_0$

H_0 est vraie. Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose H_n vraie ; alors $X_{n+1}=AX_n\underset{HR}{=}AA^nX_0=A^{n+1}X_0$ donc H_{n+1} est vraie.

Par principe de récurrence H_n est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$.

c) On pose $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. $P^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2\\ 0 & -1 & 1\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

d) Calculer la matrice $D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et en déduire A^n puis les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Soit $\forall n\in\mathbb{N},\ H_n : A^n=PD^nP^{-1}$

H_0 est vraie. Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose H_n vraie ; alors $A^{n+1}=AA^n\underset{HR}{=}PDP^{-1}PD^nP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$ donc H_{n+1} est vraie. Par principe de récurrence H_n est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix}c_n\\ a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}c_0\\ a_0\\ b_0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (-1/2)^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\left(1/2-(-1/2)^n\right)\\ 1/2\left(1/2+(-1/2)^n\right)\end{pmatrix}$

4. Troisième méthode : à l'aide d'applications linéaires

a) On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x;y;z)=\left(\frac{x+y+z}{2};\frac{x+2z}{4};\frac{x+2y}{4}\right)$.

Montrer que f est une application linéaire et déterminer son noyau et son image (on donnera une base de chaque).

$\forall\left((x;y;z);(a;b;c);\lambda\right)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R},\ f\left((x;y;z)+\lambda(a;b;c)\right)\ f(x;y;z)+\lambda f(a;b;c)$ donc f est linéaire

Ker f = Vect{(-2 ; 1 ; 1)} ; Im f = Vect{(2 ; 1 ; 1) ; (1 ; 0 ; 1)}

b) Déterminer $F=\mathrm{Ker}\left(f-Id_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}\{(2;1;1)\}$ et $G=\mathrm{Ker}\left(f+\frac{1}{2}Id_{\mathbb{R}^3}\right)=\mathrm{Vect}\{(0;1;-1)\}$.

c) Montrer que tout vecteur $u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$ peut se décomposer de manière unique sous la forme $u=u_F+u_G+u_H$ avec $u_F\in F,\ u_G\in G$ et $u_H\in\operatorname{Ker}(f)$.

On note : $u_1=(2;1;1)$, $u_{\frac{-1}{2}}=(0;1;-1)$ et $u_0=(-2;1;1)$; on a : $F=\operatorname{Vect}\{u_1\}, G=\operatorname{Vect}\left\{u_{\frac{-1}{2}}\right\}, H=\operatorname{Vect}\{u_0\}$.

$$\forall(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \lambda_1u_1+\lambda_2\ u_{\frac{-1}{2}}+\lambda_3u_0=0\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda_1-2\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1-\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

donc la famille $\left\{u_1;u_{\frac{-1}{2}};u_0\right\}$ est libre, de cardinal 3, elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi $\forall u\in\mathbb{R}^3,\exists(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ u=\lambda_1u_1+\lambda_2\ u_{\frac{-1}{2}}+\lambda_3u_0=u_F+u_G+u_H$ où $u_F\in F,\ u_G\in G$ et $u_H\in\operatorname{Ker}(f)$.

d) On note p, q, r les trois applications : $u\mapsto u_F,\ u\mapsto u_G,\ u\mapsto u_H$. (Ce sont bien des applications, du fait de l'unicité de l'écriture $u=u_F+u_G+u_H$.)

Montrer que $p\circ p=p,\ q\circ q=q$ et $r\circ r=r$, et déterminer ce que valent $f\circ p,\ f\circ q$ et $f\circ r$ (on doit obtenir des expressions simples avec p, q et r).

Par unicité de l'écriture, $\forall u_F\in F, p(u_F)=u_F;\forall\ u_G\in G, q(u_G)=u_G$ et $\forall u_H\in\operatorname{Ker}(f), r(u_H)=u_H$.

D'où : $\forall u\in\mathbb{R}^3, u=u_F+u_G+u_H, p\circ p(u)=p(u_F)=u_F; q\circ q(u)=q(u_G)=u_G$ et $r\circ r(u)=r(u_H)=u_H$.

$\forall u\in\mathbb{R}^3, u=u_F+u_G+u_H$:

$f\circ p(u)=f(u_F)=u_F$ car $F=\ F=\operatorname{Ker}\left(f-Id_{\mathbb{R}^3}\right)$ donc $f\circ p=p$

$f\circ q(u)=f(u_G)=-\frac{1}{2}u_G$ car $G=\operatorname{Ker}\left(f+\frac{1}{2}Id_{\mathbb{R}^3}\right)$ donc $f\circ q=-\frac{1}{2}q$

$f\circ r(u)=f(u_H)=0$ car $H=\operatorname{Ker}f$ donc $f\circ r=0$

e) En déduire une expression de f^n à l'aide de p, q et r, puis donner la forme explicite de $f^n(x;y;z)$.

$\forall u\in\mathbb{R}^3, u=p(u)+q(u)+r(u)$ donc, f étant linéaire,

$$f(u)=f\circ p(u)+f\circ q(u)+f\circ r(u)=p(u)-\frac{1}{2}q(u)$$

Soit $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ H_n : f^n=p+\left(\frac{-1}{2}\right)^n q$

H_1 est vraie. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on suppose H_n vraie ; alors

$$f^{n+1}=f\circ f^n\underset{HR}{=}f\circ\left(p+\left(\frac{-1}{2}\right)^n q\right)\underset{f\text{ linéaire}}{=}f\circ p+\left(\frac{-1}{2}\right)^n f\circ q=p+\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}q$$ donc H_{n+1} est vraie.

Par principe de récurrence H_n est vraie $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

On note $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases}u_1=2e_1+e_2+e_3\\ u_{\frac{-1}{2}}=e_2-e_3\\ u_0=-2e_1+e_2+e_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=1/4(u_1-u_0) & (L_1\leftarrow L_1-L_3)\\ e_2-e_3=u_{\frac{-1}{2}}\\ e_2+e_3=1/2(u_1+u_0) & (L_3\leftarrow L_1+L_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=1/4(u_1-u_0)\\ e_2=1/4\left(2u_{\frac{-1}{2}}+u_0+u_1\right) & (L_2\leftarrow L_2+L_3)\\ e_3=1/4\left(-2u_{\frac{-1}{2}}+u_0+u_1\right) & (L_3\leftarrow L_3-L_2)\end{cases}$$

On a donc : $p(e_1)=p(e_2)=p(e_3)=\frac{1}{4}u_1$; $q(e_1)=0, q(e_2)=\frac{1}{2}u_{\frac{-1}{2}}, q(e_3)=\frac{-1}{2}u_{\frac{-1}{2}}$;

Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3\in\mathbb{R}^3$,

$$f^n(u)=p(u)+\left(\frac{-1}{2}\right)^n q(u)=xp(e_1)+yp(e_2)+zp(e_3)+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\left(xq(e_1)+yq(e_2)+zq(e_3)\right)$$

$$f^n(u)=\frac{1}{4}(x+y+z)u_1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z\right)u_{\frac{-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)e_1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)y+\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)z\right)e_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)y+\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)z\right)e_3$$

Finalement,

$$f^n(x;y;z)=\left(\frac{1}{2}(x+y+z);\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)x+\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)y+\frac{1}{4}z\right);\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)x+\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)y+\frac{1}{4}z\right)\right)$$

f) Quel est le rapport avec le reste du problème ?

Soit $\forall n\in\mathbb{N}$, $H_n:(c_n;a_n;b_n)=f^n(c_0,a_0;b_0)$

H_0 est vraie. Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose H_n vraie ; alors

$(c_{n+1};a_{n+1};b_{n+1})=\left(\frac{1}{2}(c_n+a_n+b_n);\frac{c_n+2b_n}{4};\frac{c_n+2a_n}{4}\right)=f(c_n;a_n;b_n)=f^{n+1}(c_0;a_0;b_0)$ donc H_{n+1} est vraie.

Par principe de récurrence H_n est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$.

EXERCICE 2

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)=\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}$

On note C_f la courbe de f dans un repère orthonormé du plan.

1. a) Montrer que f est paire, et continue sur $\mathbb{R}$.

f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction Arctan étant impaire, la fonction f est paire.

Par quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Le développement limité à l'ordre 2 de f en 0 est : $f(x)=1-\frac{x^2}{3}+o_0(x^2)$.

On en déduit que la fonction f admet 1 pour limite en 0, et donc qu'elle y est continue.

b) Montrer que f est dérivable en 0 ; donner $f'(0)$ ainsi que l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, et la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de ce point.

Le $DL_2(0)$ de f ci-dessus donne :

f dérivable en 0 avec $f'(0)=0$ (c'est le coefficient de x dans la partie régulière du DL) ;

$\mathcal{C}_f$ admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite $\mathcal{T}$ d'équation : $y=1$;

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{T}$ au voisinage du point d'abscisse 0 (car $f(x)-1\underset{0}{\sim}-\frac{x^2}{3}$).

c) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

Comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=\frac{1}{x(1+x^2)}-\frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}$.

d) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, \int_0^x \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{d}t=\frac{-1}{2}x^2 f'(x)$

Soient $u:t\mapsto\frac{-1}{2\left(1+t^2\right)}$ et $v:t\mapsto t$; u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}, u'(t)=\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}$ et $v'(t)=1$;

d'après le théorème d'intégration par parties : $\forall x\in\mathbb{R}, \int_0^x u'v=[uv]_0^x-\int_0^x uv'$, on a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \int_0^x \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{d}t=\left[\frac{-t}{2\left(1+t^2\right)}\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{-x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)=\frac{-1}{2}x^2 f'(x).$$

e) En déduire les variations de *f*.

La fonction $t\mapsto\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$ est positive sur $\mathbb{R}$ donc, par positivité de l'intégrale, la fonction $x\mapsto\int_0^x\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t$ est positive sur $\mathbb{R}^+$. On déduit de la question précédente que la fonction *f '* est négative sur $\mathbb{R}^+$ où *f* est donc décroissante. La fonction *f* étant paire, elle est croissante sur $\mathbb{R}^-$.

2. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(0)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, \varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

a) Montrer que φ est paire.

φ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, \varphi(-x)=\frac{-1}{x}\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t\underset{u=-t}{=}\frac{-1}{x}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)\underset{f\text{ paire}}{=}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\varphi(x)$$, donc φ est paire

b) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental d'intégration, la fonction $F:x\mapsto\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, F'(x)=f(x)$.

Par quotient, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, $\lim_{x\to0}\varphi(x)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x}=F'(0)=f(0)=1$, la fonction φ est donc continue en 0.

c) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que : $\forall x\in\mathbb{R}^*, \varphi'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-\varphi(x)\right)$

On a dit dans la question précédente que *F* est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par quotient, φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, $\forall x\in\mathbb{R}^*, \varphi'(x)=\frac{-1}{x^2}F(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-\varphi(x)\right)$.

d) Montrer que φ est dérivable en 0 et déterminer $\varphi'(0)$.

On a vu dans la première question que *f* admet un $DL_2(0)$ qui vaut : $f(x)=1-\frac{x^2}{3}+o_0\left(x^2\right)$.

On en déduit que sa primitive *F* s'annulant en 0 admet un $DL_3(0)$ qui vaut : $F(x)=x-\frac{x^3}{9}+o_0\left(x^3\right)$, puis que : $\varphi(x)=1-\frac{x^2}{9}+o_0\left(x^2\right)$. Ainsi, la fonction φ est dérivable en 0, et $\varphi'(0)=0$.

e) Etudier les variations de φ.

φ étant paire, on étudie ses variations sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\varphi'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=\frac{1}{x^2}\left(xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x\left(f(x)-f(t)\right)\mathrm{d}t\right)$;

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc, $\forall x\in\mathbb{R}^+,\forall t\in[0;x], f(x)-f(t)\leq 0$,

La positivité de l'intégrale donne donc $\forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ \varphi'(x)\leq 0$ et par suite :

φ croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

f) Montrer qu'il existe une constante C telle que : $\forall t\geq 1,\ 0\leq f(t)\leq\frac{C}{t}$

$\forall t\geq 1,\ 0\leq \mathrm{Arctan}(t)\leq\frac{\pi}{2}$ donc $\forall t\geq 1,\ 0\leq f(t)\leq\frac{\pi}{2t}$.

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=0$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

L'encadrement précédent donne (par positivité de l'intégrale) :

$\forall x\geq 1,\ 0\leq\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\leq\frac{\pi}{2}\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc $\forall x\geq 1,\ 0\leq\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\leq\frac{\pi\ln(x)}{2x}$.

Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$; le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=0$.

On a : $\varphi(x)=\frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right)$ donc , par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

3. On considère l'équation (E) : $x^2y'+xy=\mathrm{Arc}\tan x$

a) Résoudre (E) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Soit $I\in\{]-\infty;0[;]0;+\infty[\}$; on note (H) : $x^2y'+xy=0$ l'équation homogène.

Les solutions de (H) sur I sont : $x\mapsto\frac{C}{x}$ où C est une constante réelle.

On a montré que $\forall x\in\mathbb{R}^*,\varphi'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-\varphi(x)\right)$ donc $x^2\varphi'(x)+x\varphi(x)=xf(x)$,

ainsi φ est une solution particulière de (E) sur I.

On en déduit les solutions de (E) sur I sont : $x\mapsto\frac{C}{x}+\varphi(x)$ où C est une constante réelle.

b) Montrer que φ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

$\varphi(0)=1$, donc la seule solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ est pour $C = 0$, c'est-à-dire φ.