I)

1°) $\dfrac{u^4+u^3+u^2+u+1}{u^2} = u^2+\dfrac{1}{u^2}+u+\dfrac{1}{u}+1$ pour u = cosx + i sinx = e^{ix}

$= e^{2ix}+e^{-2ix}+e^{ix}+e^{-ix}+1 = 2\cos(2x)+2\cos(x)+1 = 4\cos^2 x+2\cos x-1$,

donc : $u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 = u^2((2\cos x)^2 + 2\cos x - 1)$

2°) a) $u^4+u^3+u^2+u+1 = \dfrac{1-u^5}{1-u}$ si $u \neq 1$ et pour $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ on a $u^5 = 1$ donc

$u^4+u^3+u^2+u+1 = 0$ et $4\cos^2\dfrac{2\pi}{5}+2\cos\dfrac{2\pi}{5}-1=0$.

De même on montre que cos(4 π/5) est solution de : $4X^2 + 2X - 1 = 0$.

b) $4X^2+2X-1=0 \Leftrightarrow \left(X=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \vee X=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$

or $\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}<0$ donc $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

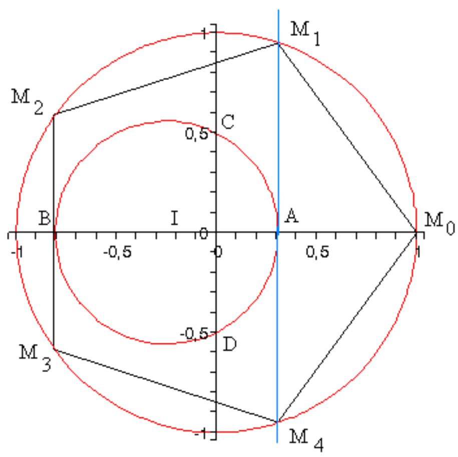
3°) $X^2 + \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(X=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \vee X=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) \Leftrightarrow \left(X=\cos\dfrac{2\pi}{5} \vee X=\cos\dfrac{4\pi}{5}\right)$

Donc C coupe l'axe des abscisses en $A\left(\cos\dfrac{2\pi}{5},0\right)$ et $B\left(\cos\dfrac{4\pi}{5},0\right)$.

4°) C : $x^2+y^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{5}{16}$ et $C\cap(Oy)=\left\{C\left(0,\dfrac{1}{2}\right),D\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

Donc on construit C de centre $I\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{4}\end{pmatrix}$ et passant par *C* et *D*, puis on trace le

cercle C' de centre O et de rayon 1. On trace alors les droites verticales passant par A et B et on obtient $M_1(\omega)$, $M_2(\omega^2)$, $M_3(\omega^3)$ et $M_4(\omega^4)$ ($\omega = e^{2i\pi/5}$) sur C' :

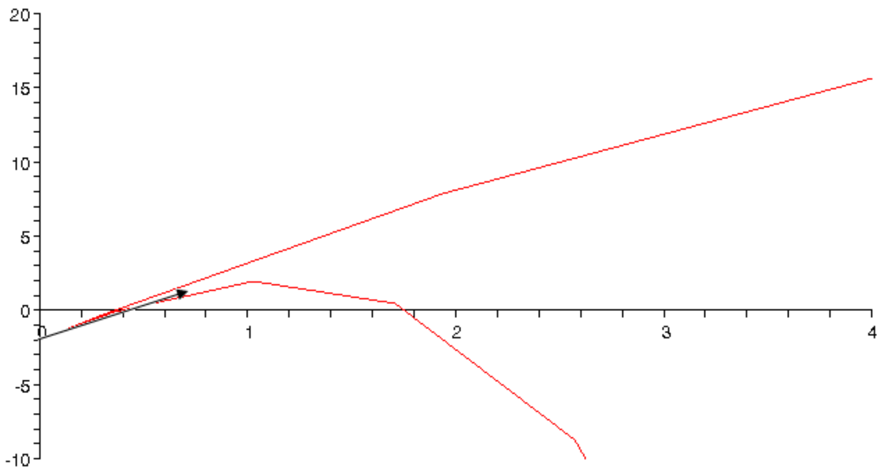


II) $C:\begin{cases} x(t)=e^{t-1}-t \\ y(t)=t^3-3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=e^{t-1}-1 \\ y'(t)=3t^2-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(t)=e^{t-1} \\ y''(t)=6t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'''(t)=e^{t-1} \\ y'''(t)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''''(t)=e^{t-1} \\ y''''(t)=0 \end{cases}$

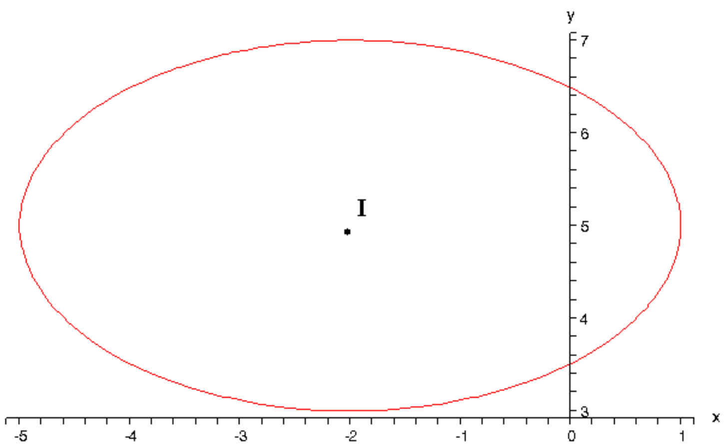
t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x		↘		↘	0	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

M(1) est point singulier, $\overrightarrow{OM}''(1)=\overrightarrow{OM}'''(1)\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}''''(1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ donc c'est un point de rebroussement de seconde espèce.

$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}=0$ d'où branches infinies de direction Oy et Ox.



III) $T:\begin{cases} x=3\cos t-2 \\ y=2\sin t+5 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{3^2}+\dfrac{(y-5)^2}{2^2}=1$: ellipse de centre I(-2, 5)



IV) $\rho = -2 + 5\cos\theta$

ρ fonction paire et 2π -périodique donc étude sur $[0,\pi]$ + sym/0x

$\theta \in [0,\pi] \Rightarrow \rho' = -5\sin\theta \leq 0$

θ	0		π
ρ'		−	
ρ	3	↘ 0 ↘	−7