ES N° 1 Analyse Math. Sup. 2011-2012 2 h

I) EXERCICE

1°) Déterminer une primitive de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$, sous la forme : $a\ln(x^2+x+1) + b\text{Arctan}\left((2x+1)/\sqrt{3}\right)$ où a et b sont des constantes à préciser.

2°) Résoudre l'équation différentielle $(E): \left(x^2+x+1\right)y' - (2x+1)\,y = \left(x^2+x+1\right)(x-3)$.

3°) Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

II) PROBLEME

Dans ce problème, on s'intéresse aux fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifiant la relation

(*) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}$

Partie 1

1°) Déterminer les fonctions constantes vérifiant (*).

2°) Montrer que la fonction th est solution de (*).

3°) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$ si f vérifie (*) ?

4°) Montrer que pour tout réel t, on a l'encadrement : $-1 \leq \dfrac{2t}{1+t^2} \leq 1$.

En déduire que si f est une fonction vérifiant (*), on a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$.

Partie 2

Dans cette partie, on considère les fonctions f vérifiant (*), continues en 0, telles que f(0) = 1, non constantes. Il existe donc un réel x_0 tel que $f(x_0) \neq f(0)$. Pour tout entier n, on pose $u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

1°) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

2°) Etablir la relation $u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{1+\left(u_{n+1}\right)^2}$. En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant et déterminer son sens de variation en fonction du signe de u_0.

3°) En utilisant les résultats des questions précédentes, aboutir à une contradiction.

4°) Que peut-on dire si on remplace l'hypothèse « f(0) = 1 » par l'hypothèse « f(0) = -1 » ?

5°) Quelles sont alors les seules fonctions vérifiant (*), continues en 0, telles que f(0) = 1 ou f(0) = -1?

Barème : **I** = 7 points , **II** = 13 points .
