CORRECTION ES N° 1 Analyse Math. Sup. 2011-2012

I) EXERCICE

1°) En dérivant $x \mapsto a\ln(x^2+x+1)+b\text{Arctan}\left((2x+1)/\sqrt{3}\right)$ et en identifiant avec $\varphi(x)=\dfrac{x-3}{x^2+x+1}$,

on trouve : a = $\dfrac{1}{2}$ et b = $\dfrac{-7\sqrt{3}}{3}$.

2°) Les solutions de l'équation homogène sont : $y : x \mapsto C\left(x^2+x+1\right)$ où $C\in\mathbb{R}$.

La méthode de variation de la constante, se ramène à résoudre $C'(x)$ = $\varphi(x)$.

Les solutions de (E) sont donc : $y : x\mapsto \left(x^2+x+1\right)\left(C+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\text{Arctan}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

3°) La solution cherchée est : $y : x\mapsto \left(x^2+x+1\right)\left(\dfrac{7}{18}\pi\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\text{Arctan}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

II) PROBLEME

Partie 1

1°) $f=cte=a \Leftrightarrow a=\dfrac{2a}{1+a^2}\Leftrightarrow\left(a=0 \text{ où } 1+a^2=2\right)\Leftrightarrow a\in\{-1,0,1\}$.

2°) $\forall x\in\mathbb{R},\ th(2x)=\dfrac{th(x)+th(x)}{1+(thx)(thx)}=\dfrac{2th(x)}{1+\left(th(x)\right)^2}$.

3°) $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1+(f(0))^2}\Leftrightarrow f(0)\in\{-1,0,1\}$.

4°) $-1\le\dfrac{2t}{1+t^2}\le 1\Leftrightarrow -1-t^2\le 2t\le 1+t^2\Leftrightarrow\begin{cases}-(1+t)^2\le 0\\ 0\le(1-t)^2\end{cases}$.

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R},-1\le f(2x)\le 1$, donc : $\forall x\in\mathbb{R},-1\le f(x)\le 1$.

Partie 2

1°) f est continue en 0 et $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_0}{2^n}=0$ donc la suite (u_n) converge vers $f(0)$ = 1.

2°) $u_n=f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=f\left(\dfrac{2x_0}{2^{n+1}}\right)=\dfrac{2f\left(\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1+\left(f\left(\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2}=\dfrac{2u_{n+1}}{1+(u_{n+1})^2}$.

$u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{1+(u_{n+1})^2}$ et $0 < \dfrac{2}{1+(u_{n+1})^2}$ implique que la suite (u_n) garde un signe constant.

$$u_{n+1} - u_n = u_{n+1}\left(1 - \frac{2}{1+(u_{n+1})^2}\right) = u_{n+1}\left(\frac{(u_{n+1})^2 - 1}{1+(u_{n+1})^2}\right) \text{ avec } \left(\frac{(u_{n+1})^2 - 1}{1+(u_{n+1})^2}\right) \le 0 \text{ car}$$

$$u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \in [-1,1].$$

On a donc : $\begin{cases} u_0 < 0 \Rightarrow (u_n)_n & \text{croissante} \\ u_0 = 0 \Rightarrow (u_n)_n & \text{constante} \\ u_0 > 0 \Rightarrow (u_n)_n & \text{décroissante} \end{cases}$

3°) La suite (u_n) a un signe constant et a pour limite 1 implique $u_0 \le 0$ impossible.
(u_n) décroissante, $u_n \in [-1,1]$ et a pour limite 1 impossible.

4°) Si on remplace l'hypothèse « *f*(0) = 1 » par l'hypothèse « *f*(0) = -1 » on obtient la même contradiction.

5°) Les seules fonctions vérifiant (*), continues en 0, telles que *f*(0) = 1 ou *f*(0) = -1 sont donc les fonctions constantes (égales à 1 ou -1).
