ES N° 2 Algèbre Math. Sup. 2011-2012 2 h

I) PROBLEME

Soit l'équation différentielle (H) : $(x^2 + x - 2)y' - 2xy = 0$.

1. Déterminer la solution y de (H) définie sur]-2 ; 1[et vérifiant $y(0) = 1$.

2. Soient E l'espace vectoriel réel des polynômes de degrés inferieurs ou égal à 2 muni de sa base canonique $B = \{X^0 ; X^1 ; X^2\}$ et l'application f définie sur E par : $f(P) = (X^2 + X - 2) P' - 2XP$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Donner la matrice A de f dans la base B.

c) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

d) Montrer qu'il existe trois nombres réels distincts a_1, a_2, a_3 tels que l'application $(f - a_i \, Id_E)$ soit non injective.

e) Déterminer une base de $Ker(f - a_i Id_E)$ pour $i \in \{1;2;3\}$.

f) Montrer que $B' = \{4X^0 + 4X + X^2 ; 2X^0 - X - X^2 ; X^0 - 2X + X^2\}$ est une base de E.

g) Donner la matrice A' de f dans la base B'.

h) Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ où P est la matrice de passage de B à B'.

i) Retrouver la valeur de A^{-1}.

3. Déduire du **2**. que l'équation différentielle (E_P) : $(x^2 + x - 2)y' - 2xy = P$ où P est un polynôme de E admet une unique solution $Q \in E$ qui soit définie sur]-2 ; 1[et que l'on déterminera.

4. Résoudre l'équation différentielle (E) : $(x^2 + x - 2)y' - 2xy = 2x^2 + 2x$.

II) EXERCICE

On considère la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Calculer le rang de A.

2. Déterminer une base de Im(f) et de Ker(f).

3. On pose $F = \text{Ker}(f)$, et $G = \text{Ker}(f^2 - 2f + 2\,\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

a) Calculer la matrice dans la base canonique de $h = f^2 - 2f + 2\,\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et déterminer une base de G.

b) Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, stables par f.

c) Déterminer une base B de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$.