CORRECTION ES N° 2	Algèbre	Math. Sup. 2011-2012

I) PROBLEME

1. $\dfrac{2x}{x^2+x-2}=\dfrac{2}{3(x-1)}+\dfrac{4}{3(x+2)}$ d'où : y(x) = $C\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}\left(x+2\right)^{\frac{4}{3}}$

La condition y(0) = 1 donne : $C=2^{\frac{-4}{3}}$ d'où: $y(x)=\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^{\frac{4}{3}}$

2. a) L'opérateur de dérivation étant linéaire, f est linéaire.
Soit $P = a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2$ dans E. $f(P) = -2a_1 X^0 + (a_1 - 4a_2 - 2a_0) X^1 + (2a_2 - a_1) X^2$ est dans E.
f est donc un endomorphisme de E.

b) $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) det(A) = -8, donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{Com}(A)=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $(f - a_i Id_E)$ est non injective si et seulement si $\det(A - a_i I_3) = 0$.
$A-a_iI_3=\begin{pmatrix} -a_i & -2 & 0 \\ -2 & 1-a_i & -2 \\ 0 & -2 & 2-a_i \end{pmatrix}$ donc $\det(A - a_iI_3) = 0$ si et seulement si : $(1 - a_i)(a_i + 2)(a_i - 4) = 0$.

e) $\mathrm{Ker}(f +2 Id_E) = \mathrm{Vect}\{(4 ; 4 ; 1)\}$; $\mathrm{Ker}(f - Id_E) = \mathrm{Vect}\{(2 ; -1 ; -1)\}$; $\mathrm{Ker}(f - 4Id_E) = \mathrm{Vect}\{(1 ; -2 ; 1)\}$

f) $\det_B(B') = -27 \neq 0$, donc B' est une base de E.

g) On remarque que les vecteurs de la nouvelle base ne sont autres que ceux trouvés à la question **e)**.
$A'=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

h) On vérifie que $=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i) On a : $A = PA'P^{-1}$ donc

$A^{-1} = PA'^{-1}P^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

3. Un polynôme Q de E est solution de (E_P) si et seulement si f(Q) = P ce qui équivaut à
$A\, \mathrm{mat}_B(Q) = \mathrm{mat}_B(P)$.
D'après ce qui précède, il existe une unique solution telle que : $\mathrm{mat}_B(Q) = A^{-1}\mathrm{mat}(P)$.

4. $Q = -3X^0 + X^2$.

II) EXERCICE

1. Les première et troisième colonnes de A sont liées, la première et la seconde ne le sont pas. Donc rg(A) = 2.

2. Im(f) = Vect{(1 ; -1 ; 0) ; (0 ; 1 ; -1)} ; Ker(f) = Vect{(1 ; 0 ; 1)}.

3. a) $\mathrm{mat}(h) = A^2 - 2A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. G = Vect{(1 ; -1 ; 0) ; (0 ; 1 ; -1)}.

b) On constate que G = Im(f). Ainsi F et G sont deux sous-espaces vectoriels stables par f.
Si $X \in F \cap G$, alors $f(X) = 0$ et $f^2(X) - 2f(X) + 2X = 0$ d'où $X = 0$.
Ainsi F et G sont en somme directe. Comme dim(F) + dim(G) = 3, ils sont supplémentaires.

c) Du fait de ce qui précède, la base {(1 ; 0 ; 1) ; (1 ; -1 ; 0) ; (0 ; 1 ; -1)} satisfait le problème.