ES N° 2	Analyse	Math. Sup. 2011-2012	2 h

I) PROBLEME

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\, dt$;

1. Déterminer l'ensemble de définition de f ; étudier sa parité à l'aide d'un changement de variable.

2. Calculer la dérivée de f, étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer la limite de f' en 0 ;

3. Etude en 0 : Justifier que la fonction $g : t \to \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

4. Etude en $+\infty$:

a) montrer que pour tout $t > 0$, $0 \leq \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1 \leq \frac{1}{2t^2}$;

b) en déduire le signe et la limite en $+\infty$ de $f(x) - x$;

5. Tracer la courbe de f sur $\mathbb{R}$, avec ses asymptotes et la tangente au point d'abscisse 0.

II) EXERCICE

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \iiint_D \frac{\ln(z)}{\left(x^2+y^2+1\right)\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz$

où $D = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 1 \leq z \leq 2,\ 0 \leq x \leq y,\ x^2+y^2 \leq 3\}$.

2. $\mathrm{J} = \iint_\Omega \frac{dx\, dy}{(x+y)^3}$ où $\Omega = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 < x < 3,\ y > 2,\ x+y < 5\right\}$