ES N° 2	Correction	Analyse	Math. Sup. 2011-2012

I) PROBLEME

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt$;

1. Ensemble de définition de f : pour x>0 (resp. x<0), $0<x<t \Rightarrow t \mapsto \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ continue, donc intégrable. Donc $D_f = \mathbb{R}$. De plus D_f est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{1+(-t)^2}}{-t}(-dt) = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt = f(x)$$, donc f est paire.

2. Dérivée : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \int_x^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt + \int_1^{2x} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt$, donc $f'(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + 2\frac{\sqrt{1+4x^2}}{2x}$

Variations sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \frac{\sqrt{1+4x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x} > 0$.

Limite de f' en 0 : $f'(x) = \frac{1+\frac{1}{2}4x^2 - \left(1+\frac{1}{2}x^2\right) + o_0\left(x^2\right)}{x} = \frac{3}{2}x + o_0\left(x\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

3. <u>Etude en 0</u> : $g(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{t} = \frac{1+\frac{1}{2}t^2 - 1 + o_0\left(t^2\right)}{t} = \frac{1}{2}t + o_0\left(t\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \overset{ppc}{=} g(0)$.

4. <u>Etude en +∞</u> :

a) $\begin{cases} \sqrt{1+t^2} > t \Rightarrow \sqrt{1+t^2} - t > 0 \Rightarrow 0 \le \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1 \\ 0 \le \left(\sqrt{1+t^2} - t\right)^2 = 1 + 2t^2 - 2t\sqrt{1+t^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1 \le \frac{1}{2t^2} \end{cases}$

donc pour tout $t > 0$: $0 \le \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1 \le \frac{1}{2t^2}$.

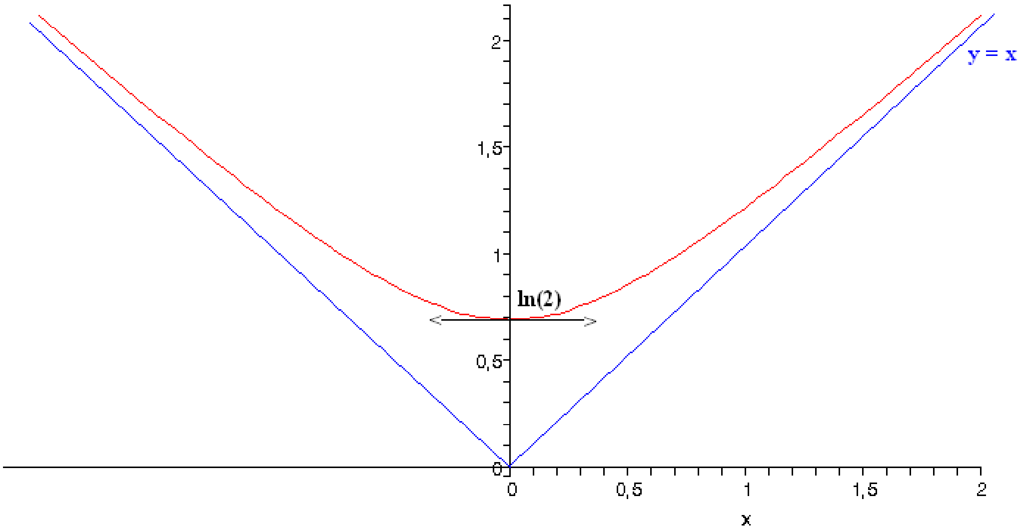
b) $f(x) - x = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt - x = \int_x^{2x} \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1\right) dt$

et donc : $0 \le f(x) - x \le \int_x^{2x} \frac{dt}{2t^2} \le \left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x} \le \frac{1}{2x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Asymptote en l'infini : y = x et la courbe est au dessus (cf. 4-b).

Tangente au point d'abscisse 0 : $g(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \left[\ln t\right]_x^{2x} = \ln(2)$

donc y = ln(2) est la tangente en 0 car $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.



II) EXERCICE

1. $I = \iiint_D \dfrac{\ln(z)}{(x^2+y^2+1)\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz$

où $D = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 1 \le z \le 2,\ 0 \le x \le y,\ x^2+y^2 \le 3\}$.

$$I = \int_1^2 \ln(z)dz \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+1)\rho} d\theta \right) = [z\ln(z)]_1^2 \frac{\pi}{4} [\text{Arctan}\rho]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{12}(2\ln 2 - 1)$$

2. $\text{J} = \iint_\Omega \dfrac{dx\, dy}{(x+y)^3}$ où $\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 < x < 3,\ y > 2,\ x+y < 5\}$

$$\text{J} = \int_1^3 \int_2^{5-x} \frac{dy}{(x+y)^3} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{-1}{(x+y)^2} \right]_2^{5-x} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2+x} - \frac{x}{25} \right]_1^3 = \frac{2}{75}$$