**I)** Soit C la courbe d'équation polaire : $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta} - 2\cos\theta$ , $\theta \in \mathbb{R}$ .

**1°)** $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$ donc la courbe est entièrement parcourue pour $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et ρ paire, donc une étude sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ suffit avec une symétrie par rapport à (OX).

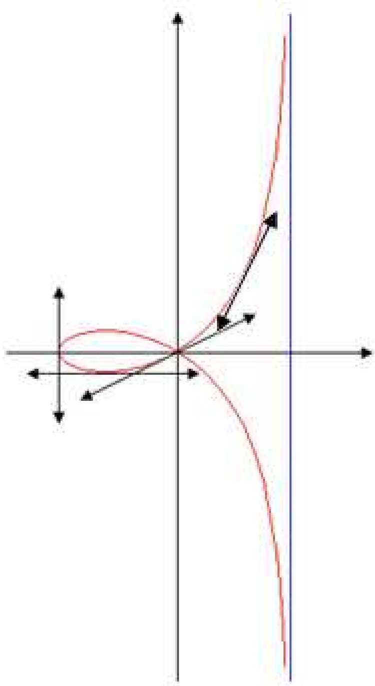
**2°)** $\rho'(\theta) = \sin\theta\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta} + 2\right) \geq 0$ .

| $\theta$ | $0$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho'$ | | + | $\frac{5}{3}$ | | + | | $2\sqrt{3}$ | + | |
| $\rho$ | $-1$ | $\nearrow$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3°)** $\overrightarrow{T_0} = -\overrightarrow{V_0}$ , $\overrightarrow{T_{\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{U_{\frac{\pi}{6}}} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{V_{\frac{\pi}{6}}}$ , $\overrightarrow{T_{\frac{\pi}{4}}} = \overrightarrow{U_{\frac{\pi}{4}}}$ et $\overrightarrow{T_{\frac{\pi}{3}}} = 3\sqrt{3}\overrightarrow{U_{\frac{\pi}{3}}} + \overrightarrow{V_{\frac{\pi}{3}}}$ .

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \rho(\theta)\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-2\cos^2\theta}{\cos\theta}(-\cos\theta) = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta - 1 = -1$ donc la droite d'équation $Y = -1$ dans $\left\{O,\overrightarrow{U_{\frac{\pi}{2}}},\overrightarrow{V_{\frac{\pi}{2}}}\right\}$ est asymptote à la courbe quand $\theta \to \dfrac{\pi}{2}$.

**4°)** C :



**5°)** Soit la courbe C' d'équation cartésienne : $x\left(x^2+y^2\right)+x^2-y^2=0$ … (*).

a) Paramétrisation de C' : $y=tx$ dans (*) donne $x^2\left(x+t^2x+1-t^2\right)=0$,

donc c' : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2-1}{1+t^2} \\ y(t)=t\dfrac{t^2-1}{1+t^2} \end{cases}$.

b) Equation polaire de C' : on plonge $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ dans (*) et on obtient

$\rho^2\left(\rho\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=0$ et donc : ρ = $\dfrac{1-2\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}-2\cos\theta$

et donc C = C'.

**II)** Soit C la courbe paramétrée d'équation : $\begin{cases} x(t)=t+\dfrac{1}{2t^2} \\ y(t)=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{t} \end{cases}$.

**1°)** $\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{t}\right)=y(t) \\ y\left(\dfrac{1}{t}\right)=x(t) \end{cases}$ donc $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est le symétrique de $M\left(t\right)$ par rapport à la droite d'équation

Y = X et on peut donc réduire le domaine d'étude de C à [-1, 1] \ {0}.

**2°)** $y^2(t)-2x(t)=\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{t}\right)^2-2\left(t+\dfrac{1}{2t^2}\right)=-t+\dfrac{t^4}{4}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$ donc C est asymptote à la parabole

P : $y^2=2x$ quand $x$ tend vers 0.

**3°)** Tableau de variation de C :

| $t$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | $2$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ |
| $x$ | $\frac{-1}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{3}{2}$ |
| $y'$ | $-2$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ |
| $y$ | $\frac{-1}{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{3}{2}$ |

**4°)** Tracés de C et P sur un même graphique :

Point singulier M(1) : $\vec{T}_1\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ car $\begin{cases}x'(1)=0\\y'(1)=0\end{cases}$ et $\begin{cases}x''(1)=3\\y''(1)=3\end{cases}$ donc rebroussement de première espèce (car symétrie par rapport à Y = X).