ES N° 1	Analyse	Math. Sup. 2012-2013	2 h

I) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

1°) a) Etudier les variations de f_n sur $[0;+\infty[$. Donner la limite de f_n en $+\infty$.
b) En déduire que f_n s'annule sur $[0;+\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n tels que $u_n < 1 < v_n$.

2°) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?

3°) a) Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
b) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$, et sa convergence vers un réel noté U.

4°) Soit g_n définie sur $]0;+\infty[$ par $\forall x > 0,\ g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.
a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.
b) On suppose que $U \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède.
c) Que peut-on en conclure ?

II) Le but du problème est de déterminer l'ensemble E des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

1°) Montrer que la fonction *th* appartient à E.

2°) a) Déterminer les fonctions constantes appartenant à E.
b) La fonction f étant un élément de E, montrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = \pm 1$, alors f est constante.

On suppose désormais que f est une fonction non constante, élément de E.

3°) a) Calculer $f(0)$, et montrer que f est impaire.
b) En écrivant $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in]-1;1[$.

4°) a) Montrer par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$.

b) On pose $b = \dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}$; exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(n)$ en fonction de b et de n.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{b^{\frac{1}{n}}-1}{1+b^{\frac{1}{n}}}$.

5°) On suppose que f est dérivable en 0, et on pose $f'(0) = k$.

a) En utilisant le taux d'accroissement de f en 0, montrer que $k = \dfrac{\ln(b)}{2}$.

b) En utilisant le taux d'accroissement de f en x, montrer que $f'(x) = k\left(1-(f(x))^2\right)$.

c) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans]-1 ; 1[.

6°) a) Après avoir justifié que la bijection réciproque de f est dérivable sur]-1 ; 1[, calculer sa dérivée.

b) En déduire l'ensemble des éléments de E, dérivables en 0.

Barème envisagé : I = 8 points , II = 12 points.