ES N° 1	Analyse Correction	Math. Sup. 2012-2013

I) **1°)** a) $\forall x \in [0;+\infty[$, $f_n'(x) = 3x^{n-1}\mathrm{e}^{-x^2}(n-2x^2)$.

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -1$.

On en déduit le tableau des variations de f_n :

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
f_n	-1 ↗		↘ -1

b) $f_n(1) = 3\,\mathrm{e}^{-1} - 1 > 0$, donc d'après le T.V.I. (la fonction f_n étant continue sur son domaine) la fonction f_n s'annule sur $[0;+\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n tels que $u_n < 1 < v_n$.

2°) D'après le tableau de variations, $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}}$, donc d'après le théorème de comparaison :

$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

3°) a) $f_n(u_n) = 0$ donc $\mathrm{e}^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$. $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}\mathrm{e}^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$.

b) On a : $f_{n+1}(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_n)$. La fonction f_{n+1} étant croissante sur $[0;1]$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante. La suite étant croissante, majorée par 1, elle converge vers un réel inférieur ou égal à 1.

4°) a) $(g_n(t)=0) \Leftrightarrow (\ln(3) + n\ln(t) - t^2 = 0) \Leftrightarrow \left(\ln\left(3t^n\mathrm{e}^{-t^2}\right) = 0\right) \Leftrightarrow \left(3t^n\mathrm{e}^{-t^2} = 1\right) \Leftrightarrow (f_n(t) = 0)$.

b) Si $U \neq 1$, $\ln(U) \neq 0$, alors comme $g_n(u_n) = 0$ on a : $n\ln(u_n) = u_n^2 - \ln(3)$, ce qui aboutit à une contradiction, par passage à la limite.

c) On déduit de ce qui précède que $U = 1$.

II) **1°)** Les formules de trigonométrie hyperbolique donnent :

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$, $th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+th(x)th(y)}$ donc la fonction th est dans E.

2°) a) Si f est dans E, constante égale à C, on a : $C = \frac{C+C}{1+C^2}$ ce qui équivaut à $C \in \{-1;0;1\}$

b) La fonction f étant un élément de E, s'il existe un réel a tel que $f(a) = \pm 1$, alors :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+a) = \frac{f(x)+f(a)}{1+f(x)f(a)} = \frac{f(x)\pm 1}{1\pm f(x)} = \mp 1$

3°) a) $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1+\left(f(0)\right)^2}$ donc $f(0)\in\{-1;0;1\}$. Comme f n'est pas constante, on ne peut pas avoir $f(0)\in\{-1;1\}$ donc $f(0)=0$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x-x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}=0$ on en déduit que $f(-x)=-f(x)$ donc f est impaire.

b) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{2f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2}$.

Or, $\forall y\in\mathbb{R},\ \left(1-|y|\right)^2\geq 0$ donc $1+y^2\geq 2|y|\geq 0$, d'où $1\geq\left|\dfrac{2y}{1+y^2}\right|\geq 0$.

De plus, $\left|\dfrac{2y}{1+y^2}\right|=1\Leftrightarrow |y|=1$. Comme il n'existe pas de réel a tel que $f(a)=\pm 1$, on a $\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|<1$, donc $f(x)\in\left]-1;1\right[$.

4°) a): $\forall n\in\mathbb{N}$, On note P_n : "$\forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{1+f(nx)}{1-f(nx)}=\left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$ ".

La propriété est clairement vérifiée pour $n = 0$.
On suppose la P_n vraie pour $n\geq 0$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1+f((n+1)x)}{1-f((n+1)x)}=\frac{1+\dfrac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)}}{1-\dfrac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)}}=\frac{1+f(nx)f(x)+f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)-f(nx)-f(x)}$$

$$=\frac{\left(1+f(nx)\right)\left(1+f(x)\right)}{\left(1-f(nx)\right)\left(1-f(x)\right)}=\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{n+1}.$$

P_{n+1} est donc vérifiée. La propriété est héréditaire.
Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

b) En prenant $x = 1$ dans la propriété précédente, on a :

$\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}=b^n$ ce qui donne: $f(n)=\dfrac{b^n-1}{b^n+1}$.

c) En prenant $x=\dfrac{1}{n}$ dans la propriété montrée au a), on a :

$\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}=\left(\dfrac{1+f\left(\frac{1}{n}\right)}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n$ ce qui donne: $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{b^{\frac{1}{n}}-1}{b^{\frac{1}{n}}+1}$

5°) a) On a : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=k$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\times f\left(\dfrac{1}{n}\right)=k$.

On a: $n\times f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)}{b^{\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(b)}-1\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(b)}+1}$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(b)}+1\right)=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(b)}-1\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{h\ln(b)}-1}{h}\right)=\ln(b)\mathrm{e}^{0\times\ln(b)}$

on en déduit: $k=\dfrac{\ln(b)}{2}$.

b) $\forall x\in\mathbb{R},\forall h\neq 0,\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\dfrac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}-f(x)}{h}=\dfrac{f(h)\left(1-\left(f(x)\right)^2\right)}{h}$

On a donc: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\left(1-\left(f(x)\right)^2\right)$.

c) On a supposé f non constante, donc $k\neq 0$. De plus, comme $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\in\left]-1;1\right[$, la dérivée de f est de signe constant et ne s'annule pas.
La fonction f est donc strictement monotone.

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b^n-1}{b^n+1}=1$, et f étant impaire, $\lim\limits_{n\to-\infty} f(n)=-1$

On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans]-1 ; 1[.

6°) a) La dérivée de f ne s'annulant pas, la bijection réciproque de f est dérivable sur]-1 ; 1[,

et $\forall y\in\left]-1;1\right[,\ \left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}=\dfrac{1}{k\left(1-\left(f\left(f^{-1}(y)\right)\right)^2\right)}=\dfrac{1}{k\left(1-y^2\right)}$.

b) On en déduit que $\forall y\in\left]-1;1\right[,\ \left(f^{-1}\right)(y)=\dfrac{1}{k}Argth(y)+f^{-1}(0)=\dfrac{1}{k}Argth(y)$.

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=th(kx)$.