EXAMEN 2012-2013

PROBLEME d'algèbre

Pour tout réels *a* et *b*, on pose $M_{a,b}=\begin{pmatrix}2a-b & 0 & 0\\ -a+b & a & -a+b\\ -a+b & -a+b & a\end{pmatrix}$, puis $F=\{M_{a,b}\,/\,a \text{ et } b \text{ réels}\}$.

Partie I - Etude d'un cas particulier (8 points)

Dans cette partie, on prend $b=a+1$, et $M_{a,b}$ devient $M_a=\begin{pmatrix}a-1 & 0 & 0\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$.

On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_a.

On pose $d_1=(1,-1,0)$, $d_2=(1,0,-1)$ et $d_3=(0,1,1)$.

1) Montrer que $D=(d_1,d_2,d_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Calculer $f(d_1)$, $f(d_2)$ et $f(d_3)$ et en déduire la matrice N_a de f_a dans la base *D*.

3) Montrer que, quelque soit *a*, f_a n'est ni une projection, ni une symétrie.

4) Pour tout entier naturel *n*, déterminer la matrice de $f_a^{\,n}$ dans la base *D*.

5) dans cette question, on prend $a=2$. Déterminer la matrice de $f_2^{\,n}$ dans la base canonique.

Partie II - Etude d'un endomorphisme (5 points)

Soit φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P)=3X\left(X^3-X^2-X+X^0\right)P''-6X\left(X^2-X^0\right)P'+2\left(3X^2+3X-5X^0\right)P$.

1) Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Montrer que cette matrice est un élément de *F*.

Partie III - Etude du cas général (7 points + 6 points bonus pour Q4 et Q5)

1) Montrer que *F* est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base et la dimension de *F*.

2) Montrer que $B=(I,J)$ est une base de *F* avec $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

3) On définit l'application $\Phi:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to F\\ (a,b)\mapsto M_{a,b}\end{cases}$

Montrer que Φ est une application linéaire.

Déterminer la matrice de Φ dans les bases *C* et *B*, avec *C* base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B=(I,J)$.

4) a) Calculer J^2, J^3. Puis déterminer J^n pour $n\geq 1$.

b) Déterminer les coordonnées α et β de $M_{a,b}$ dans la base $B=(I,J)$.

c) Apres avoir justifié l'utilisation de la formule du Binôme de Newton, montrer :

$$\forall n\geq 1,\ M_{a,b}^{\;n}=(\alpha I+\beta J)^n=\alpha^n I+\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k 2^{k-1}\right)\times J\ .$$

d) Calculer $\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k 2^{k-1}\right)$, et donner $M_{a,b}^{\;n}$ en fonction de *I, J, a, b* et *n*.

5) Conclusion : déterminer $\varphi^n\left(1+2X+X^2\right)$.

Problème et exercices sur feuilles séparées

Exercice 1 : (10 points)

Soit J = $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(2-x^2\right)} dx$.

1- Faire dans J les changements de variable $x = \cos(t)$, puis $u = \tan(t)$.

2- Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+2x^2\right)}$.

3- Donner une primitive de f.

4- Calculer J.

5- Calculer I = $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \operatorname{Arctan}\sqrt{1-x^2}\, dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2 : (11 points)

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(t) = (x(t), y(t))$ où :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2t} + 2\ln(3+t) \\ y(t) = t - 2 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

1- Déterminer de domaine de définition D_f de f.

2- Dresser le tableau de variation de f.

3- Déterminer des DL_3 en 1 de x et y (on posera $u=t-1$).

4- Etudier la nature des points singuliers éventuels.

5- Etudier les branches infinies de la courbe C_f paramétrée représentant f (dans le cas d'asymptotes on précisera la position par rapport à la courbe).

6- Tracer C_f.