Correction ES2 2012-2013

PROBLEME d'algèbre

Pour tout réels *a* et *b*, on pose $M_{a,b}=\begin{pmatrix}2a-b & 0 & 0\\ -a+b & a & -a+b\\ -a+b & -a+b & a\end{pmatrix}$, puis $F=\{M_{a,b}\,/\,a \text{ et } b \text{ réels}\}$.

Partie I - Etude d'un cas particulier (8 points)

Dans cette partie, on prend $b=a+1$, et $M_{a,b}$ devient $M_a=\begin{pmatrix}a-1 & 0 & 0\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$.

On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_a.

On pose $d_1=(1,-1,0)$, $d_2=(1,0,-1)$ et $d_3=(0,1,1)$.

1) Montrer que $D=(d_1,d_2,d_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $Det(d_1,d_2,d_3)=2\neq 0$

2) Calculer $f(d_1)=(a-1)d_1$, $f(d_2)=(a-1)d_2$ et $f(d_3)=(a+1)d_3$

et en déduire la matrice $N_a=\begin{pmatrix}a-1 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}$ de f_a dans la base *D*.

3) Montrer que, quelque soit *a*, f_a n'est ni une projection, ni une symétrie.

$$(N_a)^2=\begin{pmatrix}(a-1)^2 & 0 & 0\\ 0 & (a-1)^2 & 0\\ 0 & 0 & (a+1)^2\end{pmatrix}\neq\left|\begin{matrix}N_a\\ I_3\end{matrix}\right.\quad \forall a\in\mathbb{R}$$

4) Pour tout entier naturel *n*, déterminer la matrice de $f_a^{\,n}$ dans la base *D*.

$$(N_a)^n=\begin{pmatrix}(a-1)^n & 0 & 0\\ 0 & (a-1)^n & 0\\ 0 & 0 & (a+1)^n\end{pmatrix}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

5) Dans cette question, on prend $a=2$. Déterminer la matrice de $f_2^{\,n}$ dans la base canonique.

$$(M_{2,3})^n=P(N_2)^n P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1+3^n & 1+3^n & -1+3^n\\ -1+3^n & -1+3^n & 1+3^n\end{pmatrix}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Partie II - Etude d'un endomorphisme (5 points)

Soit φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P)=3X\left(X^3-X^2-X+X^0\right)P''-6X\left(X^2-X^0\right)P'+2\left(3X^2+3X-5X^0\right)P$.

1) Vérifier que φ est un endomorphisme de $E=\mathbb{R}_2[X]$.

$\varphi(P+\lambda Q)=\varphi(P)+\lambda\varphi(Q)$ et $\varphi(X^0)=6X^2+6X-10\in E;\varphi(X)=-4X+6X^2\in E;\varphi(X^2)=-4X^2+6X\in E$

2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. $M(\varphi)=\begin{pmatrix}-10 & 0 & 0\\ 6 & -4 & 6\\ 6 & 6 & -4\end{pmatrix}$

3) Montrer que cette matrice est un élément de *F*. $M(\varphi)=M_{-4,2}\in F$

Partie III - Etude du cas général (7 points + 6 points bonus pour Q4 et Q5)

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base et la dimension de F.

$$F = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = Vect\left(M_{1,0}, M_{0,1}\right)$$, dim(F) = 2 car matrices non colinéaires.

2) Montrer que $B = (I, J)$ est une base de F avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{1,1} \in F$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_{1,2} \in F$

et (I, J) base car matrices non colinéaires.

3) On définit l'application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to F \\ (a,b) \mapsto M_{a,b} \end{cases}$

Montrer que Φ est une application linéaire $\Phi((a,b) + \lambda(a',b')) = \Phi(a,b) + \lambda\Phi(a',b')$.

Déterminer la matrice de Φ dans les bases C et B, avec C base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B = (I, J)$.

$$\left(\Phi(1,0) = M_{1,0} = 2I - J \text{ et } \Phi(0,1) = M_{0,1} = -I + J\right) \Rightarrow M_{C,B}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) a) Calculer $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$. Puis déterminer $J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1} J$ pour $n \geq 1$.

b) Déterminer les coordonnées α et β de $M_{a,b}$ dans la base $B = (I, J)$.

$$M_{a,b} = (2a-b)I + (-a+b)J \Rightarrow \alpha = (2a-b) \text{ et } \beta = (-a+b)$$

c) Apres avoir justifié l'utilisation de la formule du Binôme de Newton (I.J = J.I), montrer :

$$\forall n \geq 1,\ M_{a,b}{}^n = (\alpha I + \beta J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} I^{n-k} \beta^k J^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k 2^{k-1} J = \alpha^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k 2^{k-1}\right) \times J .$$

d) Calculer $\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k 2^{k-1}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (2\beta)^k = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (2\beta)^k\right) - \alpha^n\right] = \frac{1}{2}\left[(\alpha + 2\beta)^n - \alpha^n\right]$,

et donner $M_{a,b}{}^n = (2a-b)^n I + \frac{1}{2}\left[b^n - (2a-b)^n\right] J$ en fonction de I, J, a, b et n.

5) Conclusion : déterminer $\varphi^n(1 + 2X + X^2)$.

$$\left(M_{-4,2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-10)^n I \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[2^n - (-10)^n\right] J \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-10)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[2^n - (-10)^n\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = (-10)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\left[2^n - (-10)^n\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc : $\varphi^n(1 + 2X + X^2) = (-10)^n (1 + 2X + X^2) + 2\left[2^n - (-10)^n\right](X + X^2)$.

Exercice 1 :

Soit J = $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(2-x^2\right)}dx$.

1- Faire dans J les changements de variable $x = \cos(t)$, puis $u = \tan(t)$.
$J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{du}{\left(1+2u^2\right)\left(1+u^2\right)}$

2- Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+2x^2\right)} = \frac{-1}{1+x^2} + \frac{2}{1+2x^2}$

3- Donner une primitive de f : $F = -\operatorname{Arc\,tan}(x) + \sqrt{2}\operatorname{Arc\,tan}\left(\sqrt{2}x\right)$

4- Calculer J $= \sqrt{2}\operatorname{Arc\,tan}\left(\sqrt{6}\right) - \frac{\pi}{3}$

5- Calculer I = $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \operatorname{Arctan}\sqrt{1-x^2}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

$$I = \left[x\operatorname{Arc\,tan}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + J = -\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{2}\operatorname{Arc\,tan}\left(\sqrt{6}\right) - \frac{\pi}{3}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(t) = (x(t), y(t))$ où : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2t} + 2\ln(3+t) \\ y(t) = t - 2 + \frac{1}{t} \end{cases}$

1- Déterminer de domaine de définition D_f de f. $D_f =]-3;0[\cup]0;+\infty[$

2- Dresser le tableau de variation de f. $\begin{cases} x'(t) = \frac{(t-1)(4t+3)}{2t^2(3+t)} \\ y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \end{cases}$

t	-3		-1		$-\frac{3}{4}$		0		1		$+\infty$
x'(t)	‖	+		+	0	−	‖	−	0	+	
x	‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}+2\ln(2)$	↗	$-\frac{2}{3}+2\ln\left(\frac{9}{4}\right)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+2\ln(4)$	↗	$+\infty$
y'(t)		+	0	−		−	‖	−	0	+	
y	$-\frac{16}{3}$	↗	-4	↘	$-\frac{49}{12}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
			↔		↕				PS		

3- Déterminer des DL_3 en 1 de x et y (on posera $u=t-1$).

$$x(t)=\frac{1}{2}+2\ln(4)+\frac{7}{16}(t-1)^2-\frac{47}{96}(t-1)^3+o\left((t-1)^3\right)$$

$$y(t)=(t-1)^2-(t-1)^3+o\left((t-1)^3\right)$$

4- Etudier la nature des points singuliers éventuels.

D'après la question précédente, pour t = 0, il y a un rebroussement de première espèce.

5- Etudier les branches infinies de la courbe C_f paramétrée représentant f (dans le cas d'asymptotes on précisera la position par rapport à la courbe).

En $-\infty$: Asymptote d'équation $y=-\dfrac{16}{3}$

En 0 : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=2$ et $y(t)-2x(t)=t-2-4\ln(3+t)=-2-4\ln(3)-\dfrac{1}{3}t+o(t)$

Asymtpote d'équation y = 2x – 2 – 4ln(3) au dessus de la courbe pour t > 0 $\left(x(t)\to+\infty; y(t)\to+\infty\right)$; en-dessous pour t < 0 $\left(x(t)\to-\infty; y(t)\to-\infty\right)$

En $+\infty$: $\dfrac{y(t)}{x(t)}\sim\dfrac{t}{2\ln(t)}\to+\infty$; branche parabolique de direction (Oy).

6- Tracer C_f.