EXERCICE I

On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, et on considère

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 2 + i(1-j) + j(z-2) \end{array}$$

1. Soient *z* et *z'* deux nombres complexes.

a) Montrer que : $f(z) - f(z') = j(z - z')$.

b) En déduire que : $|f(z) - f(z')| = |z - z'|$.

2. On note $z_0 = 2 + i$.

a) Calculer $f(z_0)$.

b) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) - z_0 = j(z - z_0)$.

c) Quelle transformation du plan f représente-t-elle ?

3. On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = Id_{\mathbb{C}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = f \circ f_n$.

a) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(z) - z_0 = j^n(z - z_0)$.

b) Montrer alors que : $f_3 = Id_{\mathbb{C}}$.

c) En déduire que *f* est bijective, et déterminer sa réciproque.

d) Quelle transformation du plan cette réciproque représente-t-elle ?

4. Soients $A = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = 5\}$, et *E* l'ensemble des points images des éléments de *A*.

a) Déterminer la nature de *E*.

b) Déterminer $f(A)$

EXERCICE II

On pose : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et $M = A - B$.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$(resp. $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices réelles carrées (resp. colonnes) d'ordre 3.

On définit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par : $X_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \sum_{k=0}^{n-1} M^k$.

1. a) Calculer AB, BA, A^2 et B^2.

b) En déduire A^k, B^k, et M^k pour tout *k* de $\mathbb{N}^*$.

(Pour le calcul de M^k, on rappelle la formule du binôme de Newton pour les matrices :

Si *A* et *B* sont deux matrices carrées de même ordre qui commutent alors $(A+B)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} A^p B^{n-p}$.)

c) Pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, exprimer X_n en fonction de *I*, *A*, et *B*.

T.S.V.P.

2. On pose $Y = I - M$.

a) Montrer que Y est inversible, et calculer Y^{-1}.

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $X_n = Y^{-1}\left(I - M^n\right)$. (On pourra calculer le produit YX_n).

3. On définit la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{3,1}\left(\mathbb{R}\right)$ par $S_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = MS_{n-1} + N$, où $N = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = M^n S_0 + X_n N$.

b) En déduire S_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit α un réel distinct de 1, et soit λ un réel non nul.

On définit une suite réelle $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de y_0 dans $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = \alpha y_{n-1} + \lambda n^2$.

a) Montrer qu'il existe une suite $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $P_n = a + bn + cn^2$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait l'égalité $P_n = \alpha P_{n-1} + \lambda n^2$. (On calculera a, b, c en fonction de α et λ.)

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $x_n = y_n - P_n$. Montrer que $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

c) Calculer x_n puis y_n en fonction de n, α, λ et y_0.

5. On définit la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{3,1}\left(\mathbb{R}\right)$ par $S_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = MS_{n-1} + N$, où $N = \begin{pmatrix} 2n^2 \\ n^2 \\ -2n^2 \end{pmatrix}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} u_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n \\ v_n = 2\alpha_n - \beta_n - \gamma_n \\ w_n = \alpha_n - 2\beta_n + \gamma_n \end{cases}$.

a) Traduire l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = MS_{n-1} + N$ par un système.

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = n^2$.

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*, v_n = 3v_{n-1} + 5n^2$ et en déduire l'expression de v_n en fonction de n.

d) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*, w_n = -3w_{n-1} - 2n^2$ et en déduire l'expression de w_n en fonction de n.

e) En déduire finalement l'expression de S_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Barème envisagé : 7 points - 13 points