EXERCICE I

1. a) $f(z)-f(z')=j(z-z')$ s'obtient immédiatement par le calcul.

b) On passe au module dans le résultat précédent, et comme $|j|=1$, $|f(z)-f(z')|=|z-z'|$.

2. a) $f(z_0)=z_0$.

b) De **1.a)** et **2.a)** il vient : $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)-f(z_0)=f(z)-z_0=j(z-z_0)$.

c) f représente la rotation de centre Ω d'affixe z_0 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. a) Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n(z)-z_0=j^n(z-z_0)$.

Comme $f_0=Id_{\mathbb{C}}$, $f_0(z)-z_0=z-z_0=j^0(z-z_0)$, la propriété est donc vraie pour $n=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$; on suppose $f_n(z)-z_0=j^n(z-z_0)$. (H.R.)

On a : $f_{n+1}(z)-z_0=f(f_n(z))-z_0\underset{\textbf{2.b)}}{=}j(f_n(z)-z_0)\underset{H.R.}{=}j\times j^n(z-z_0)=j^{n+1}(z-z_0)$.

La propriété est donc héréditaire.

Par principe de récurrence, on en déduit que : $\forall z\in\mathbb{C},\forall n\in\mathbb{N},\ f_n(z)-z_0=j^n(z-z_0)$.

b) D'après **3.a)**, pour $n=3$, on a $\forall z\in\mathbb{C},\ f_3(z)-z_0=j^3(z-z_0)=z-z_0$, soit encore $\forall z\in\mathbb{C},\ f_3(z)=z$ d'où $f_3=Id_{\mathbb{C}}$.

c) De $f_3=Id_{\mathbb{C}}$, il vient : $f\circ f_2=Id_{\mathbb{C}}$. On en déduit que f est bijective, et que f_2 est sa réciproque.

d) On a : $\forall z\in\mathbb{C},\ f_2(z)-z_0=j^2(z-z_0)$, avec $j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

f_2 représente donc la rotation de centre Ω d'affixe z_0 et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$.

4. a) E est le cercle de centre Ω et de rayon 5.

b) D'après **2.b)**, $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)-z_0=j(z-z_0)$.

Si $z\in A$, $|f(z)-z_0|=|z-z_0|=5$ (car $|j|=1$), ainsi $f(z)\in A$; on en déduit que $f(A)\subset A$;

Si $z\in A$, f étant bijective, il existe $z_1\in\mathbb{C}$ tel que $f(z_1)=z$; et, d'après **2.b)**,

$z-z_0=f(z_1)-z_0=j(z_1-z_0)$. Comme $z\in A$, on a : $|z-z_0|=|z_1-z_0|=5$ donc $z_1\in A$, ainsi $z=f(z_1)\in f(A)$; on en déduit que $A\subset f(A)$.

Finalement, par double inclusion, on a : $f(A)=A$.

EXERCICE II

1. a) $AB=BA=0$, $A^2=3A$, et $B^2=3B$.

b) Une récurrence immédiate donne : $A^k=3^{k-1}A$ et $B^k=3^{k-1}B$, pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

Comme $M=A-B$ et que $AB=BA$, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$M^k=(A-B)^k=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}A^p(-B)^{k-p}$. Or, pour $p\in[\![1;k-1]\!],\ A^pB^{k-p}=AB\times A^{p-1}B^{k-1-p}=0$, donc pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $M^k=A^k+(-B)^k=3^{k-1}A+(-1)^k3^{k-1}B=3^{k-1}A-(-3)^{k-1}B$.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on a :

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} M^k = I + \sum_{k=1}^{n-1} M^k = I + \sum_{k=1}^{n-1}\left(3^{k-1}A - (-3)^{k-1}B\right) = I + \left(\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}\right)A - \left(\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^{k-1}\right)B$$

et donc $X_n = I + \dfrac{3^{n-1}-1}{2}A + \dfrac{(-3)^{n-1}-1}{4}B$ (somme de termes consécutifs de suites géométriques).

Pour $n = 1$, l'expression obtenue est encore valable puisqu'elle donne $X_1 = I$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = I + \dfrac{3^{n-1}-1}{2}A + \dfrac{(-3)^{n-1}-1}{4}B$.

2. a) On a : $Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. On peut appliquer la méthode du pivot de Gauss-Jordan :

$$(Y|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\begin{cases} L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A ce stade, on conclut que Y est inversible car aucun pivot n'est nul.

$$(Y|I) \underset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{cases}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\begin{cases} L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2, \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{cases}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$$

On a donc : $Y^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $YX_n = (I - M)\sum_{k=0}^{n-1} M^k = I - M^n$ (distributivité, puis télescopage).

Comme Y est inversible, en multipliant à gauche par Y^{-1}, il vient : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = Y^{-1}\left(I - M^n\right)$

3. a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = M^n S_0 + X_n N$.

$X_0 = 0$ et $M^0 S_0 + X_0 N = S_0$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $S_n = M^n S_0 + X_n N$ (H.R.).

On a alors : $S_{n+1} = MS_n + N \underset{H.R.}{=} M\left(M^n S_0 + X_n N\right) + N = M^{n+1}S_0 + MX_n N + N = M^{n+1}S_0 + \left(MX_n + I\right)N$

or $MX_n + I = M\sum_{k=0}^{n-1} M^k + I = \sum_{k=1}^{n} M^k + I = \sum_{k=0}^{n} M^k = X_{n+1}$ donc $S_{n+1} = M^{n+1}S_0 + X_{n+1}N$.

La propriété est donc héréditaire.

Par principe de récurrence, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = M^n S_0 + X_n N$.

b) On déduit de **1.b)**, **1.c)** et **3.a)** que

$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 3^{n-1}AS_0 - (-3)^{n-1}BS_0 + N + \dfrac{3^{n-1}-1}{2}AN + \dfrac{(-3)^{n-1}-1}{4}BN$; de plus, comme

$AS_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, BS_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, AN = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$, et $BN = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 \times 3^n - 18 \\ -5 \times (-3)^n - 11 \\ -14 \times 3^n + 5 \times (-3)^n + 5 \end{pmatrix}$

4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $P_n = a + bn + cn^2$.

$\left(P_n = \alpha P_{n-1} + \lambda n^2\right) \Leftrightarrow \left(a + bn + cn^2 = \alpha\left(a + b(n-1) + c(n-1)^2\right) + \lambda n^2\right)$

$\Leftrightarrow \left(a + bn + cn^2 = \alpha(a - b + c) + \alpha(b - 2c)n + (\alpha c + \lambda)n^2\right)$

Cette égalité étant vérifiée pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on obtient en identifiant :

$c = \dfrac{\lambda}{1-\alpha}, b = \dfrac{-2\lambda\alpha}{(1-\alpha)^2}, a = \dfrac{\lambda\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P_n = \alpha P_{n-1} + \lambda n^2$, et $y_n = \alpha y_{n-1} + \lambda n^2$, donc par soustraction membres à membres, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \alpha x_{n-1}$; ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison α.

c) On déduit de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \alpha^n x_0$ et par suite que $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \alpha^n(y_0 - P_0) + P_n = \alpha^n(y_0 - a) + a + bn + cn^2$; enfin, compte tenu de **4.a)** :

$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \alpha^n\left(y_0 - \dfrac{\lambda\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}\right) + \dfrac{\lambda\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} - \dfrac{2\lambda\alpha}{(1-\alpha)^2}n + \dfrac{\lambda}{1-\alpha}n^2$.

5. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = MS_{n-1} + N$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \alpha_n = 2\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} - \gamma_{n-1} + 2n^2 \\ \beta_n = \alpha_{n-1} - 2\beta_{n-1} + \gamma_{n-1} + n^2 \\ \gamma_n = -3\alpha_{n-1} + 3\beta_{n-1} - 2n^2 \end{cases}$

b) D'après **5.a)**, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$u_n = 2\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} - \gamma_{n-1} + 2n^2 + \alpha_{n-1} - 2\beta_{n-1} + \gamma_{n-1} + n^2 - 3\alpha_{n-1} + 3\beta_{n-1} - 2n^2 = n^2$

De plus, $u_0 = \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 2 + 1 - 3 = 0 = 0^2$.

Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = n^2$.

c) D'après **5.a)**, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 6\alpha_{n-1} - 3\beta_{n-1} - 3\gamma_{n-1} + 5n^2 = 3v_{n-1} + 5n^2$;

Ainsi, d'après **4.c)**, avec $\alpha = 3$ et $\lambda = 5$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{27}{2}\times 3^n - \dfrac{15}{2} - \dfrac{15}{2}\times n - \dfrac{5}{2}\times n^2$.

d) D'après **5.a)**, $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = -3\alpha_{n-1} + 6\beta_{n-1} - 3\gamma_{n-1} - 2n^2 = -3w_{n-1} - 2n^2$;

Ainsi, d'après **4.c)**, avec $\alpha = -3$ et $\lambda = -2$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = -\dfrac{45}{16}\times(-3)^n - \dfrac{3}{16} - \dfrac{3}{4}\times n - \dfrac{1}{2}\times n^2$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n \\ v_n = 2\alpha_n - \beta_n - \gamma_n \\ w_n = \alpha_n - 2\beta_n + \gamma_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n) \\ \beta_n = \dfrac{1}{3}(u_n - w_n) \\ \gamma_n = \dfrac{1}{3}(u_n - v_v + w_n) \end{cases}$; de **5.a) b)** et **c)** on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{2}\times 3^n - \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}n - \dfrac{1}{2}n^2 \\ \dfrac{15}{16}\times(-3)^n + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4}n + \dfrac{1}{2}n^2 \\ -\dfrac{9}{2}\times 3^n - \dfrac{15}{16}\times(-3)^n + \dfrac{39}{16} + \dfrac{9}{4}n + n^2 \end{pmatrix}.$$