EXERCICE I

L'objectif du problème est le calcul approché d'une racine carrée d'un nombre réel *A*.
Pour cela, on considère deux suites (x_n) et (y_n), telles que :

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + y_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ y_{n+1} = y_n + Ax_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Première partie : Calcul approché de $\sqrt{A}$, avec $A > 0$.

1. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement positives et strictement croissantes.

2. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont divergentes.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $r_n = \dfrac{y_n}{x_n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = \dfrac{r_n + A}{r_n + 1}$.

b) Etudier, en fonction de *A*, les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{x+A}{x+1}$.

4. On suppose que $0 < A < 1$.
Montrer que la suite (r_n) converge et déterminer sa limite.

5. On suppose que $A > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = r_{2n}$ et $v_n = r_{2n+1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \sqrt{A} \leq v_n$.

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c) En déduire que la suite (r_n) converge et déterminer sa limite.

Deuxième partie : Majoration de l'erreur

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $x_n > (1+A)x_{n-2}$;
en déduire que pour tout $n \geq 1$: $x_{2n} > (1+A)^n$.

2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1}^2 - Ax_{n+1}^2 = (1-A)\left(y_n^2 - Ax_n^2\right)$;

en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n^2 - Ax_n^2 = (1-A)^{n+1}$

3. On suppose que $A > 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \sqrt{A}\right| < \dfrac{(A-1)^{2n+1}}{2x_{2n}^2}$; en déduire que $\left|u_n - \sqrt{A}\right| < \dfrac{A-1}{2}\left(\dfrac{A-1}{1+A}\right)^{2n}$.

4. On suppose que $0 < A < 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \sqrt{A}\right| < \dfrac{(1-A)^{2n+1}}{2Ax_{2n}^2}$; en déduire que $\left|u_n - \sqrt{A}\right| < \dfrac{1-A}{2A}\left(\dfrac{1-A}{1+A}\right)^{2n}$.

T.S.V.P.

EXERCICE II

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y''-2y'-3y=\frac{e^{3x}}{\mathrm{ch}^2(x)} \quad \text{(E)}$$

1. Donner les solutions de l'équation différentielle homogène :

$$y''-2y'-3y=0 \quad \text{(H)}$$

2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x)=e^{-3x}y(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$z''+4z'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \quad (L_1)$$

3. Montrer que pour que z soit solution de (L_1) il suffit que z soit solution de l'équation différentielle :

$$z'+4z=\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \quad (L_2)$$

4. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout réel *x* :

$$e^{4x}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=e^{2x}\left(ae^{2x}+b+\frac{c}{1+e^{2x}}\right)$$

5. Résoudre (L_2).

6. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Barème envisagé : 12 points - 8 points