EXERCICE I

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + y_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ y_{n+1} = y_n + Ax_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Première partie : Calcul approché de $\sqrt{A}$, avec $A > 0$.

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$: « $0 < x_n < x_{n+1}$ et $0 < y_n < y_{n+1}$ ».

On a $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$; d'où : $x_1 = x_0 + y_0 > x_0$ et $y_1 = y_0 + Ax_0 > y_0$. $P(0)$ est donc vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie.

Alors $x_{n+2} = x_{n+1} + y_{n+1} > x_{n+1} > 0$ et $y_{n+2} = y_{n+1} + Ax_{n+1} > y_{n+1} > 0$. $P(n+1)$ est donc vraie.

Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

2. Si (x_n) converge vers un réel L, alors, comme pour tout entier n : $y_n = x_{n+1} - x_n$, on en déduit que la suite (y_n) converge vers 0. Or c'est une suite strictement croissante à termes positifs, donc pour tout entier $n > 0$, $y_n > y_0 > 0$, la suite (y_n) ne peut donc pas converger vers 0.

La suite (x_n) est donc divergente. Comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Comme pour tout entier n, $y_{n+1} = y_n + Ax_n > Ax_n$ avec $A > 0$, le théorème de comparaison donne également (y_n) diverge vers $+\infty$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $r_n = \dfrac{y_n}{x_n}$.

On remarque que (r_n) est bien définie car pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \neq 0$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $r_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \dfrac{y_n + Ax_n}{y_n + x_n} = \dfrac{x_n\left(\dfrac{y_n}{x_n} + A\right)}{x_n\left(\dfrac{y_n}{x_n} + 1\right)} = \dfrac{r_n + A}{r_n + 1}$.

b) f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{x + A}{x + 1} = 1 + \dfrac{A - 1}{x + 1}$.

Ainsi, par composition de fonctions usuelles, si $A < 1$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et si $A > 1$, la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Si $A = 1$, f est constante.

(On peut bien sûr également dériver f…)

On peut remarquer à ce stade, que (x_n) et (y_n) étant des suites positives, il en est de même de (r_n), et pour tout entier n : $r_{n+1} = f(r_n)$.

4. On suppose que $0 < A < 1$. La fonction f est donc strictement croissante.

La suite (r_n) est donc monotone, de monotonie déterminée par l'ordre des deux premiers termes.

On a : $r_0 = \dfrac{y_0}{x_0} = 1$, et $r_1 = f(r_0) = \dfrac{1 + A}{2} < 1$ car $A < 1$.

On en déduit que la suite (r_n) est décroissante positive. Elle converge donc vers un réel L positif, solution de l'équation $f(x) = x$ (car f est continue).

$f(L)=L \Leftrightarrow \dfrac{L+A}{L+1}=L \Leftrightarrow L^2=A.$. Comme $L \geq 0$ on en déduit que $L=\sqrt{A}$.

On remarque au passage que $f\left(\sqrt{A}\right)=\sqrt{A}$.

5. On suppose que $A>1$. La fonction f est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme (de façon très évidente), elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $f\circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $u_n=r_{2n}$ et $v_n=r_{2n+1}$.

On peut remarquer à ce stade que pour tout entier n : $u_{n+1}=f\circ f\left(u_n\right)$ et $v_{n+1}=f\circ f\left(v_n\right)$.

a) Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la propriété $Q(n)$: « $u_n\leq\sqrt{A}\leq v_n$ ».

Comme $A>1$, on a : $u_0=r_0=1<\sqrt{A}$.

En appliquant la fonction f, on obtient : $f\left(r_0\right)>f\left(\sqrt{A}\right)$ d'où $v_0=r_1=f(r_0)>\sqrt{A}$.

$Q(0)$ est donc vraie.

Soit un entier n. On suppose que $Q(n)$ est vraie : $r_{2n}<\sqrt{A}<r_{2n+1}$.

En appliquant $f\circ f$, on obtient immédiatement $Q(n+1)$ vraie.

Par principe de récurrence, la propriété $Q(n)$ est donc vraie pour tout entier n.

b) On sait que la fonction $f\circ f$ est strictement croissante et que pour tout entier n :
$u_{n+1}=f\circ f\left(u_n\right)$ et $v_{n+1}=f\circ f\left(v_n\right)$. On en déduit donc que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones, de monotonie déterminée par l'ordre de leurs deux premiers termes.

On a : $u_1=r_2=f\left(r_1\right)=\dfrac{1+3A}{3+A}=1+\dfrac{2A-2}{3+A}>1$ (car $A>1$, donc $2A-2>0$).

Ainsi $u_1>u_0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

On a : $v_1=r_3=f\left(r_2\right)=\dfrac{1+6A+A^2}{4+4A}$. D'où : $v_0-v_1=\dfrac{1+A}{2}-\dfrac{1+6A+A^2}{4+4A}=\dfrac{A^2-2A+1}{4+4A}=\dfrac{(A-1)^2}{4+4A}>0$.

Ainsi $v_0>v_1$ donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

La suite (u_n) est croissante, majorée, elle converge donc vers un réel L tel que $u_0\leq L\leq\sqrt{A}$.

$f\circ f$ étant continue, on en déduit que L est solution de l'équation $f\circ f\,(L)=L$.

$$f\circ f\left(L\right)=L \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{L+A}{L+1}+A}{\dfrac{L+A}{L+1}+1}=L \Leftrightarrow A=L^2$$. Comme $L>0$, on en déduit que $L=\sqrt{A}$.

La suite (v_n) vérifie pour tout n : $v_n=f(u_n)$; elle converge donc vers $f\left(\sqrt{A}\right)=\sqrt{A}$.

La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante, et ces suites ont la même limite. Elles sont donc adjacentes.

c) Les suites extraites de rangs pairs et impairs (r_{2n}) et (r_{2n+1}) de la suite (r_n) convergent vers le même réel $\sqrt{A}$, on en déduit que (r_n) converge vers $\sqrt{A}$.

Deuxième partie : Majoration de l'erreur

1. Pour tout $n \geq 2$, $x_n = x_{n-1} + y_{n-1} = x_{n-2} + y_{n-2} + y_{n-2} + Ax_{n-2} = (1+A)x_{n-2} + 2y_{n-2} > (1+A)x_{n-2}$;

Soit pour tout $n \geq 1$, la propriété $R(n)$: « $x_{2n} > (1+A)^n$ ».

$x_2 = 3 + A > 1 + A$ donc $R(1)$ est vraie.

Soit $n \geq 1$. On suppose $R(n)$ vraie : $x_{2n} > (1+A)^n$.

Alors, d'après le résultat précédent, on a : $x_{2(n+1)} > (1+A)x_{2n} > (1+A)(1+A)^n = (1+A)^{n+1}$,

donc $R(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1}^2 - Ax_{n+1}^2 = \left(y_n + Ax_n\right)^2 - A\left(y_n + x_n\right)^2 = (1-A)y_n^2 + (A^2 - A)x_n^2 = (1-A)\left(y_n^2 - Ax_n^2\right)$.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $S(n)$: « $y_n^2 - Ax_n^2 = (1-A)^{n+1}$ ».

$y_0^2 - Ax_0^2 = (1-A)$ donc $S(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $S(n)$ vraie : $y_n^2 - Ax_n^2 = (1-A)^{n+1}$.

Alors, d'après le résultat précédent, on a :
$y_{n+1}^2 - Ax_{n+1}^2 = (1-A)\left(y_n^2 - Ax_n^2\right) = (1-A)(1-A)^{n+1} = (1-A)^{n+2}$ donc $S(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, $S(n)$ est vraie pour tout entier n.

3. On suppose que $A > 1$.

L'égalité démontrée à la question **2.** donne :

$$y_{2n}^2 - Ax_{2n}^2 = (1-A)^{2n+1} \Leftrightarrow \frac{y_{2n}^2}{x_{2n}^2} - A = \frac{(1-A)^{2n+1}}{x_{2n}^2} \Leftrightarrow u_n^2 - A = \frac{(1-A)^{2n+1}}{x_{2n}^2} \Leftrightarrow u_n - \sqrt{A} = \frac{(1-A)^{2n+1}}{x_{2n}^2\left(u_n + \sqrt{A}\right)}$$

On a vu dans la partie précédente que pour tout entier n : $u_n \geq 1$, d'où $u_n + \sqrt{A} > 2$ et donc :

$$\left|u_n - \sqrt{A}\right| = \frac{|1-A|^{2n+1}}{x_{2n}^2\left(u_n + \sqrt{A}\right)} < \frac{|1-A|^{2n+1}}{2x_{2n}^2}$$

On a vu à la question **1.** que $x_{2n} > (1+A)^n$, on a donc : $\left|u_n - \sqrt{A}\right| < \dfrac{(A-1)^{2n+1}}{2(1+A)^n} = \dfrac{A-1}{2}\left(\dfrac{A-1}{1+A}\right)^{2n}$.

4. On suppose que $0 < A < 1$.

On a vu dans la première partie que pour tout n : $r_n > \sqrt{A} > A$.

Ainsi $u_n + \sqrt{A} > 2A$, d'où : $\left|u_n - \sqrt{A}\right| = \dfrac{|1-A|^{2n+1}}{x_{2n}^2\left(u_n + \sqrt{A}\right)} < \dfrac{(1-A)^{2n+1}}{2Ax_{2n}^2}$.

On a vu à la question **1.** que $x_{2n} > (1+A)^n$, on a donc : $\left|u_n - \sqrt{A}\right| < \dfrac{1-A}{2A}\left(\dfrac{1-A}{1+A}\right)^{2n}$.

EXERCICE II

On considère l'équation différentielle suivante : $y''-2y'-3y=\dfrac{e^{3x}}{ch^2(x)}$ (E)

1. $S_H = \left\{ y:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\, y(x)=Ae^{3x}+Be^{-x} \,/\, (A;B)\in\mathbb{R}^2 \right\}$

2. z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x)=e^{-3x}y(x)$ est solution de l'équation différentielle : $z''+4z'=\dfrac{1}{ch^2(x)}$ (L_1)

si et seulement si pour tout réel x : $\left(9y(x)-6y'(x)+y''(x)\right)e^{-3x}+4(-3y+y')e^{-3x}=\dfrac{1}{ch^2(x)}$

ce qui équivaut à : pour tout réel x $y''(x)-2y'(x)-3y(x)=\dfrac{e^{3x}}{ch^2(x)}$

ce qui équivaut à y est solution de (E).

3. Si z est solution de l'équation différentielle : $z'+4z=\dfrac{sh(x)}{ch(x)}$ (L_2), alors en dérivant de part et d'autre, on a : $z''+4z'=\dfrac{ch^2(x)-sh^2(x)}{ch^2(x)}=\dfrac{1}{ch^2(x)}$ donc z est solution de (L_1).

4. Pour tout réel x : $e^{4x}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=e^{2x}\left(e^{2x}-2+\dfrac{2}{1+e^{2x}}\right)$

5. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $z'+4z=0$ sont : $h:x\mapsto Ce^{-4x}$, $C\in\mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de (L_2) de la forme $z_p:x\mapsto y(x)e^{-4x}$.

z_p est solution de (L_2) si et seulement si pour tout réel x :

$$y'(x)=\frac{sh(x)}{ch(x)}e^{4x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}e^{4x}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}e^{4x}=e^{2x}\left(e^{2x}-2+\frac{2}{1+e^{2x}}\right)$$

On prend $y(x)=\dfrac{1}{4}e^{4x}-e^{2x}+\ln\left(1+e^{2x}\right)$ et par suite :

$$z_p(x)=\left(\frac{1}{4}e^{4x}-e^{2x}+\ln\left(1+e^{2x}\right)\right)e^{-4x}=\frac{1}{4}-e^{-2x}+e^{-4x}\ln\left(1+e^{2x}\right)$$

Ainsi, les solutions de (L_2) sont : $z:x\mapsto Ce^{-4x}+\dfrac{1}{4}-e^{-2x}+e^{-4x}\ln\left(1+e^{2x}\right)$

6. En utilisant toutes les questions précédentes, on obtient :

$$S_E=\left\{ y:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\, y(x)=Ae^{3x}+Be^{-x}+\frac{e^{3x}}{4}-e^{x}+e^{-x}\ln\left(1+e^{2x}\right) / (A;B)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$