MATHEMATIQUES : EXAMEN DU SEMESTRE 2

ICAM LILLE – NANTES – PARIS-SENART – TOULOUSE

Durée : 4 heures

Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra compte de la clarté des explications et du soin apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Rendre séparément le problème, l'exercice 1, l'exercice 2.

I) **EXERCICE** (4 points)

Soit f une fonction de classe C^1 sur [0 ; 1].

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad F(x)=\int_0^1 f(t)\cos(xt)\,dt \qquad G(x)=\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, justifier que $F(x)$ et $G(x)$ sont bien définis.

On a donc pour la suite deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer si les fonctions F et G sont paires ou impaires.

3. Dans cette question on cherche à déterminer les limites de F et G en $+\infty$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, prouver que :

$$\forall x>0, F(x)+iG(x)=\frac{f(1)\mathrm{e}^{ix}-f(0)}{ix}-\frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt$$

b) Justifier rapidement que f et f' sont bornées sur [0 ; 1].

On notera $M=\sup_{x\in[0;1]}|f(x)|$ et $M'=\sup_{x\in[0;1]}|f'(x)|$.

c) Déduire des deux questions précédentes qu'il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall x>0, |F(x)+iG(x)| \leq \frac{A}{x}.$$

d) Déterminer à l'aide des questions précédentes $\lim_{x\to+\infty}(F(x)+iG(x))$.

En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} G(x)$.

II) PROBLEME 1 (8 points)

Partie A

On s'intéresse à la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{xe^x}{\mathrm{sh}(x)}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On rappelle que pour tout $x\in\mathbb{R}, \mathrm{sh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. a) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Déterminer le développement limité de la fonction sh en 0 à l'ordre 4.

c) Déterminer le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 3.

d) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée.

e) Justifier que f est dérivable en 0 ; puis donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en 0 ainsi que sa position par rapport à $\mathcal{C}$.

2. a) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=e^{2x}-(2x+1)$.

Etudier les variations de la fonction u et déterminer son signe.

b) Justifier rapidement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$.

c) En déduire les variations de la fonction f.

d) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et dresser son tableau de variations.

Pour la partie suivante, on pourra utiliser sans démontrer que :
f est ***croissante et positive*** *sur* [-1 ; 0] *et* f' *est* ***croissante*** *sur* [-1 ; 0].

Partie B

On pose pour tout $x\in\mathbb{R}, h(x)=\dfrac{1}{2}f(x)-\dfrac{1}{2}$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=h(u_n), \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1. a) Démontrer que [-1 ; 0] est stable par h, et en déduire le signe de (u_n).

b) Démontrer que (u_n) est monotone.

c) En déduire la nature de (u_n).

2. a) Montrer que $\forall x\in[-1;0] : 0\le h'(x)\le\dfrac{1}{2}$.

b) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis démontrer que :

$\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}|\le\dfrac{1}{2}|u_n|$; puis que : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n|\le\dfrac{1}{2^n}$.

c) En déduire la limite (u_n).

d) Déterminer un entier N tel que : $\forall n\ge N, u_n\in\left]-10^{-5};0\right[$.

PROBLEME 2 (8 points)

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & 1/4 & 0\\ 1 & 1/2 & 1\\ 0 & 1/4 & 0\end{pmatrix}$.

On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. a) Déterminer le rang de *f*, une base de Im(*f*) ainsi qu'une base de Ker(*f*).

b) *f* est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

c) Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f+\dfrac{1}{2}Id\right)$ est une droite vectorielle.

2. On considère la famille $\mathcal{B}$ = (u, v, w) où : u = (1 ; 0 ; -1), v = (1 ; -2 ; 1) et w = (1 ; 4 ; 1).

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.

c) En déduire la matrice D de f dans $\mathcal{B}$.

3. a) Déterminer une matrice inversible $P\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A=PDP^{-1}$.

b) Déterminer P^{-1} et en déduire l'expression de A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

On donnera le résultat final sous la forme d'une seule matrice.

4. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune initialement deux boules : une boule blanche et une boule noire.
On effectue n fois de suite l'expérience suivante : on choisit au hasard une boule dans chaque urne et on échange les deux boules tirées.
On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches dans l'urne U_1 à l'issue de ces n expériences.

On note C_n la matrice colonne : $\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\ P(X_n=1)\\ P(X_n=2)\end{pmatrix}$

a) Que vaut la matrice C_0 ?

b) Calculer $P_{X_n=0}(X_{n+1}=0), P_{X_n=1}(X_{n+1}=0), P_{X_n=2}(X_{n+1}=0)$.

En déduire que $P(X_{n+1}=0)=\dfrac{1}{4}P(X_n=1)$. Déterminer de même $P(X_{n+1}=2)$ et $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0), P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$. Justifier.

d) En déduire que :

$\forall n\in\mathbb{N},\ C_{n+1}=AC_n$ où A est la matrice définie précédemment.

e) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n=A^nC_0.$$

e) En déduire la loi de X_n ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty}P(X_n=k)$ pour $k\in\{0;1;2\}$.